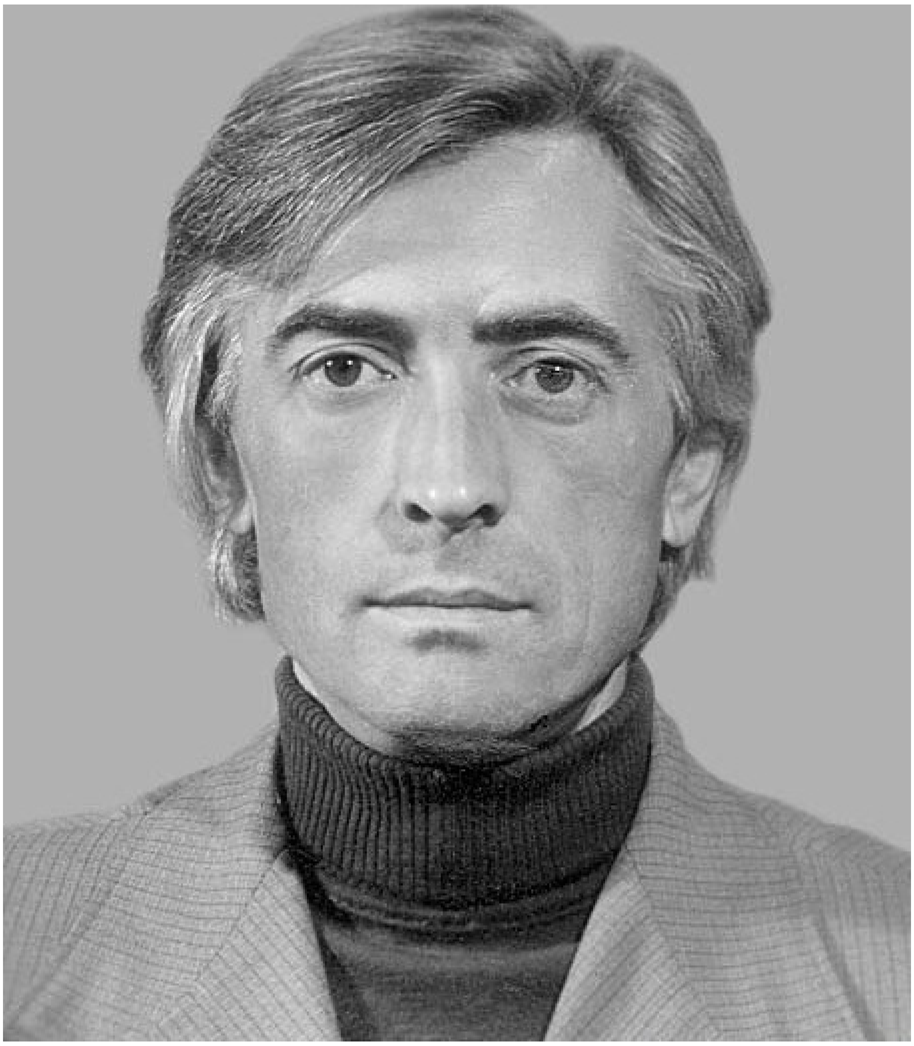
Б.В. БАЗАЛІЙ

ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

ВИБРАНІ ПРАЦІ



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Б.В. БАЗАЛІЙ

ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

ВИБРАНІ ПРАЦІ

СЛОВ'ЯНСЬК 2018

УДК 517.9

У книгу вміщено 19 наукових статей видатного фахівця в галузі задач з вільними межами Бориса Васильовича Базалія (1938-2012). Представлено роботи за основними напрямками наукової діяльності Б.В.Базалія: дослідження хвильових рухів рідини; початково-крайових задач з некласичними крайовими умовами; еволюційних задач з вільними межами для еліптичних і параболічних рівнянь; задачі Стефана з нерегулярною початковою межею.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів, що спеціалізуються в галузі теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і нелінійного аніалізу.

Відповідальний редактор Н.В.Васильєва

Рекомендовано до друку вченою радою
Інституту прикладної математики і механіки НАН України

ЗМІСТ

БОРИС ВАСИЛЬОВИЧ БАЗАЛІЙ

Наукові інтереси Базалія Б.В. було сконцентровано навколо нелінійних граничних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в областях з вільними (невідомими) межами. Більшість досліджень пов'язана з доведенням класичної розв'язності граничних задач для еліптичних та параболічних рівнянь другого порядку, в яких поряд з невідомими розподілами всередині області треба знайти також і саму область, тобто межу області. Такі задачі є математичними моделями для різноманітних явищ в гідродинаміці, теплопровідності, нелінійній фільтрації тощо.

При розгляді стаціонарних задач з вільною межею (наприклад, хвилі на поверхні рідини) традиційним методом дослідження, що веде початок від праць Леві-Чевіта, Некрасова, Секерж-Заньковича та Данілюка, є побудова інтегро-диференційних рівнянь, еквівалентних вихідним співвідношенням проблеми, та доведення їхньої розв'язності у відповідних функціональних класах. В цьому напрямку Базалій Б.В. вивчав більш загальну проблему, коли на невідомій межі задається умова типу Бернуллі, що містить зовнішні сили з достатньо широкими умовами підпорядкування. Зокрема, з використанням теореми про розгалуження розв'язків було доведено існування класичного розв'язку, коли додаткова умова на вільній межі містить другі похідні цієї межі.

Історично перші результати для багатовимірної моделі фазового переходу було отримано в роботах О.А. Олійник, О.А. Ладиженської та А. Фрідмана. В них було використано ідею узагальнених розв'язків, але при цьому для таких слабких розв'язків майже відсутня інформація про невідому межу. Проблема отримання регулярних розв'язків задачі Стефана була частково вирішена в роботах А.М. Мейрманова та І. Ханзави з використанням методів регуляризації, але тут з'являлася велика різниця між регулярністю початкових умов і розв'язку. Цю різницю було зліквідовано в докторській дисертації Б.В. Базалія, де було запропоновано якісно новий метод дослідження задач подібного классу. Цей метод можна визначити, як метод локальних оцінок, подібно до методу Шаудера, або метод потенціалів, бо основні аналітичні труднощі пов'язані з оцінками об'ємних та поверхневих потенціалів зі спеціальними ядрами. Модельні задачі, на вивченні яких базується запропонований метод, не є класичними, бо містять у граничних умовах похідні того ж порядку, що і диференційні оператори всередині області. Цей метод дозволяє також отримати результати по класичній розв'язності інших проблем, подібних до задачі Стефана, наприклад: довести класичну розв'язність задачі з вільною межею, що містить два параболічних рівняння та систему Нав'є-Стокса (така система моделює термодифузію з конвекцією у рідинній фазі); довести класичну розв'язність задачі з вільною межею для системи, що містить параболічне та еліптичне рівняння, тобто у випадку виродження системи (це так звана проблема Маскета-Веригина); вивчити задачу Стефана для нелінійного виродженого параболічного рівняння в класах регулярних функцій; дослідити нестаціонарну задачу з вільною межею для еліптичного рівняння з граничною умовою, що містить кривину невідомої поверхні.

Проблема деформації вільної межі вивчалася також у випадку нерегулярної форми початкової межі. Для двовимірного випадку модельна задача формулюється всередині кутової області. Наявність такої сингулярності приводить до необхідності побудови аналітичної в області функції з диференційно-різничннми умовами на заданій межі. Були встановлені достатні умови на початкові дані, за яких кутова точка початкової області деякий час є нерухомою, та доведена класична розв'язність у вагових классах Гельдера.

Загальна гранична проблема для параболічного рівняння другого порядку з граничною умовою, що містить похідні того ж порядку, що і рівняння, була сформульована для потреб теорії ймовірностей А.Д. Вентцелем. З точки зору методів, розроблених Б.В. Базалієм, найбільш важким є випадок, коли гранична умова містить похідні другого порядку по тангенціальним до межі просторовим напрямкам. Було побудовано спеціальні простори регулярних функцій та доведено розв'язність задачі у таких класах.

В останні десятиріччя велика увага приділялась задачі Коші для так званого рівняння пористого середовища (або рівняння нелінійної фільтрації), для якого властива скінченність швидкості розповсюдження збурень і, як наслідок, наявність поверхні розподілу. Було встановлено, що локально ця задача подібна до задачі Стефана, але при вивченні відповідної модельної задачі тут з'являється сингулярність у вигляді сильної виродженості диференційного рівняння. В одновимірному випадку в роботах С. Аронсона, Х. Васкеса, Е. Енджененты було доведено аналітичність вільної межі, але після деякого позитивного проміжку часу. Запропонований Борисом Васильовичом метод потенціалів дозволив встановити регулярність вільної межі до початкового моменту в залежності від регулярності початкових даних, і, що важливо, не тільки в одновимірному випадку, але і в довільному багатовимірному просторі.

Серед інших розробок, запроваджених Базалієм Б.В., слід відзначити застосування варіаційних методів до стаціонарних задач з вільними межами, що виникають в теорії термопровідності; застосування методів симетризації для отримання оцінок розв'язків нелінійних параболічних рівнянь, доведення нетеровості деяких класів сингулярних інтегральних рівнянь.

Цікаво, що останнім часом методи, розроблені для вивчення задач з вільною межею, знайшли застосування в задачах математичної біології. У зв'язку з цим треба відмітити останні публікації Базалія Б.В. у співавторстві з відомим математиком А. Фридманом, в яких досліджуються різноманітні математичні моделі біологічних процесів, і наголос головним чином робиться на отриманні розв'язків з регулярною вільною межею.

Науковий спадок Б.В. Базалія налічує більше 80 статей. Його наукові роботи є широко відомими за межами України.

Перелік наукових праць Базалія Бориса Васильовича

[1] *Волновые движения жидкости с учетом поверхностного натяжения* // Доклады АН СССР, т.169, №6; 1966; с. 1247-1249.

[2] *О волновых движениях с обобщенным законом Бернулли, содержащим кривизну свободной границы* // Диссертция на соискание степени кандидата физ.-мат наук, 1967.

[3[*О спектре одной нелинейной задачи* // Мат. физика, Киев. Наукова Думка, №5, 1968, с.15-18 (совм. с И.И. Данилюком).

[4[*Волновые движения по обобщенному закону Бернулли с учетом кривизны свободной границы* // Мат. физика, Киев, Наукова Думка, №7, 1969, с. 3-I8.

[5[*Бифуркации критических точек интегрируемых функционалов с переменной областью интегрирования* // Доклады АН Украины, сер. А №1 1970, с. 3-7 (совм. с И.И. Данилюком).

[6[*О критических точках функционалов, соответствующих задаче со свободной границей* // Мат. физика, Киев, Наукова Думка, №8 1970 с. 3-13 (совм. с И.И. Данилюком). '

[7[*Об одной нестационарной задаче со свободной границей* // Укр. мат. журнал, т.25, №3. 1973, с. 332-336.

[8[*О температурном поле струй перегретого металла* // Мат. физика, Киев, Наукова Думка, №13, 1973, с. 5-9 (совм. с И.И. Данилюком).

[9[*Об одной смешанной задаче со свободной границей для уравнения Лапласа* // Доклады АН СССР т. 209,№2,1973, с. 320-323 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[10[*Об одной термофизической квазистационарной задаче со свободной границей* // Граничные задачи теории теплопроводности, Инст. мат. АН Украины, Киев, 1975, с.45-56 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[11[*Об одной стационарной задаче Стефана* // Доклады АН УССР, сер. А №1, 1974, с. 5-8 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[12[*Одна стационарная двухфазная задача Стефана* // Мат физика Киев Наукова Думка, №16, 1974, с. 52-61 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[13[*Обобщение стационарной задачи Стефана* // Мат. физика, Киев, Наукова Думка, №17, 1975, с.65-80 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[14[*Об одной квазистационарной задаче Стефана* // Доклады АН Украины, сер. А, №1, 1976, с. 3-5.

[15[*Об одном доказательстве существования двухфазной задачи Стефана* // Мат. анализ и теория вероятности, Киев, Наукова думка, 1978, с. 7-11.

[16[*Асимптотическое поведение решений задачи Стефана* // Доклады АН УССР, сер. А, №12, 1978, с. 1059-1061.

[17[*О стабилизации решений задачи Стефана для одного квазилинейного уравнения* // Граничные задачи мат. физики, Киев, Наукова думка, 1979, с. 24-39 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[18[*О спектре потенциала двойного слоя кривой ограниченного вращения* // Граничные задачи диф. уравнений, Киев, Наукова думка, 1980, с. 13-30 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[19[*Вариационные методы в смешанной задаче со свободной границей теплового баланса* // Мат. физика, Киев, Наукова думка, №27, 1980, с. 62-74 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[20[*О стабилизации решений в задаче Стефана* // Граничные задачи мат. физики, Киев, Наукова думка, 1981, с. 5-7 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[21[*Скорость стабилизации в задаче Стефана* // Доклады АН УССР, сер. А, №4, с. 3-6, 1981 (сов с В.Ю. Шелеповым).

[22[*Скорость стабилизации в задаче Стефана* // Мат. физика, Киев, Наукова думка, №30, 1981, с. 35-41 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[23[*К вопросу о стабилизации в задаче Стефана* // Уравнения в частных производных и задачи со свободными границами Киев, Наукова думка, 1982, с. 20-24 (совм. с В.Ю. Шелеповым).

[24[*Стабилизация гладких решений двухфазной задачи Стефана* // Доклады АН СССР, т. 262, 2, 1982, с. 265-269.

[25[*Исследование решений двухфазной задачи Стефана, близких к стационарным решениям* // Доклады АН УССР, сер. А, №12, 1983, с. 3-7.

[26[*Стабилизация стационарного решения в задаче Стефана (случай одной пространственной переменной)* // Мат. физика и нелинейная механика. Киев, Наукова Думка, т.38, №4,1985, с. 52-56.

[27[*Нестабильность и бифуркационные решения квазистационарной термодиффузионной задачи Стефана* // Доклады АН УССР, сер. А, №4, 1985 с.5-9.

[28[*Variation methods in mixed problem of thermal equilibrium with a free boundary* // Amer. Math. Society, v. 126, 1985, p. 77-92 (with V.Ju. Shelepov)

[29[*Стационарная двухфазная задача Стефана с конвективным теплопереносом в жидкой фазе* // Мат. физика и нелинейная механика, Киев, Наукова Думка, т. 39 №5, 1986, с. 50-56.

[30[*Классическая разрешимость задачи Стефана с конвекцией* / / Доклады АН СССР, т. 287,№1, 1986, с. 20-24. (совм. с С.П. Дегтяревым).

[31[*Термодиффузионная задача Стефана* // Успехи мат. наук, т.41,№4 1986, с. 192.

[32[*О классической разрешимости многомерной задачи Стефана с конвективным движением вязкой несжимаемой жидкости* // Мат. сборник, т. 132, №174, 1987, с. 3-19 (совм. с С.П. Дегтяревым).

[33[*Задача Стефана* // Доклады АН УССР, сер. А, №11, 1986, с. 3-7.

[34[*Классическая разрешимость многомерной задачи фильтрации со свободной границей* // Доклады АН УССР, сер. А, №2, 1987, с. 3-7 (совм. с И.И. Данилюком, С.П. Дегтяревым)

[35[*Задачи со свободными границами для параболических уравнений* // Функциональные и численные методы в мат. физике, Киев, Наукова Думка, 1988, с. 20-23.

[36[*Задача Стефана (краевые задачи со свободными границами для параболических и эллиптических уравнений)* // Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук по специальности 01.01.02. - дифференциальные уравнения, Ленинград, 1987, 286 с.

[37[*Разрешимость задачи со свободной границей между областями, определяемыми с помощью параболического и эллиптического уравнений* // УМЖ, т. 41,№10, 1989, с. 1343-1349 (совм. с С.П. Дегтяревым).

[38[*Об одной линейной граничной задаче со старшими производными в граничном условии, возникающей в теории задач со свободными границами* // Нелинейные граничные задачи, Киев, Наукова Думка, №1, 1989, с. 7-12 (совм. с С.П. Дегтяревым)

[39[*О разрешимости многомерной задачи фильтрации со свободной границей* // Препринт 89.10, Донецк, ИПММ АН УСССР, 1989, 49с. (совм. с С.П. Дегтяревым).

[40[*Первая краевая задача для вырожденного параболического уравнения* // Нелинейные граничные задачи, Киев, Наукова Думка. №3,1991, с. 6-13 (совм. с С.П. Дегтяревым)

[41[*Вырождающиеся параболические уравнения и задачи со свободными границами* // Доклады АН Украины, сер. А, №1, 1990, с. 3-7 (совм. с С.П. Дегтяревым).

[42[*Глобальная классическая разрешимость одномерной задачи Стефана для вырождающихся уравнений* // Нелинейные граничные задачи, Киев, Наукова Думка, №5, 1993, с. 6-13 (совм. с С.П. Дегтяревым).

[43[*Разрешимость задачи Стефана с кинематическим граничным условием на свободной границе* // Нелинейные граничные задачи, Киев, Наукова Думка, №4, 1992, с. 1-5 (совм. с С.П. Дегтяревым).

[44[*The classical solvability of some free boundary problems for degenerate parabolic equations* // Free Boundary Problems Involving Solid. Pitman Reas. Notes, ser. 281, 1992, p. 88-91 (совм. с И.И. Данилюком, С.П. Дегтяревым).

[45[*Задача Стефана с кинематическим и классическилг условиями на свободной границе* // УМЖ, т. 44,№2, 1992, с. 155-166 (совм. с С.П. Дегтяревым).

[46[*The classical Stefan problem as the limit of the Stefan problem with a kinetic condition at the free boundary* // Intern. Ser. Numeric Math., v. 106, 1992 p. 83-90 (with S.P. Degtyarev).

[47[*Симметризация и начально-краевые задачи для некоторого класса нелинейных параболических уравнений 2-го порядка* // УМЖ, т.45, №7, 1993, с. 884-892 (совм. с А.Ф. Тедеевым).

[48[*Оценки скорости стабилизации решений для, некоторых задач со свободной границей* // УМЖ, т.44, №10, 1992, с. 1299-1306 (совм. с А.Ф. Тедеевым) .

[49[*Метод симметризации и оценки решения задачи Неймана в целом по времени для уравнения пористой среды в областях с некомпактной границей* // УМЖ, т.47, №2, 1994, с. 147-157 (совм. с А.Ф. Тедеевым).

[50[*Об одной задаче со свободной границей для нелинейной системы* // УМЖ, т.48, №9, 1996, с. 1155-1165 (совм. с Н.В. Краснощеком).

[51[*Симметризация и начально-краевые .задачи для некоторого класса квазилинейных параболических уравнений второго порядка* // Нелинейные граничные задачи, №6, 1995, с. 15-20 (совм. с А.Ф. Тедеевым).

[52[*Исследование задачи Стефана с конвективым теплопереносом* // Успехи мат. наук, т.38, №5, 1983, с. 152-154.

[53[*Задача Стефана для уравнения Лапласа* // Доклады АН Украины, сер.А, №1, 1997, с. 11-16.

[54[*Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы* // УМЖ, т. 49, №10, 1997, с.1299-1315.

[55[*Усреднение квазистационарной задача Стефана в областях с каналами* // Нелинейные граничные задачи, №7, 1997, с. 20-27.

[56[*Оценки решений одной модельной задачи сопряжения, возникающей в теории задач со свободными границами* // Диф. уравнения, т.33, №10, 1997, с. 1374-1381.

[57[*Об одной краевой задаче для параболического второго порядка второго порядка со старшими производными в граничном условии* // Записки ЛОМИ, т.249, 1997, с.40-54. (совм. с С.Н. Казминым)

[58[*Об одном доказательстве классической разрешимости задачи Hele-Shaw* // УМЖ, т. 50, №11, 1998, с. 1452-1462.

[59[*Об одной модельной задаче для параболического уравнения со старшими производными по пространственным переменным в граничном условии* // Мат. заметка, т.63, №3, 1998, с. 468-477.

[60[*Задача типа Вентцеля для параболического уравнения второго порядка* // Нелинейные граничные задачи, №8, 1998, с. 31-37.

[61[*Модельная задача Hele-Shaw в прямом угле*// Доклады НАН Украины, №11, 1999, с. 3-7.

[62[*Estimates of solutions of Hele-Shaw model problem inn nonsmooth domains* // Preprint, Donetsk, №99.05, 1999, 21p (with N.V. Vasyl'eva).

[63[*Регулярность решения задачи со свободной границей для уравнения пористой среды* // Алгебра и анализ, т. 12, №2, 2000, с. 100-130 (совм. с Н.В. Краснощеком) .

[64[*О разрешимости модельной задачи Hele-Shaw в весовых простанствах Гельдера в плоском угле* // УМЖ, т. 52, №11, 2000, с. 1446-1457 (совм. с Н.В. Васильевой).

[65[*Коэрцитивные оценки решений многомерной модельной задачи в теории нелинейной фильтрации со свободной границей* // Доклады НАН Украины, №1, 2001, с. 7-11.

[66[*Регулярность решений многомерной задачи со свободной границей для уравнения пористой среды* // Сибирский мат. журнал, т. 13, №3, 2003, с. 1- 53 (совм. с Н.В. Краснощеком).

[67[*Global existence and asymptotic stability for an elliptic-parabolic free boundary problem: an application to a model of tumor growth* // Indiana Univ. Math. J., v. 52, n. 5, 2003, p. 1265-1304 (with A.Friedman).

[68[*A free boundary problem for an elliptic-parabolic system: an application to a model of tumor growth* // Communication PDE, v. 28, no. 3-4, 2003 p. 627-675 (with A. Friedman).

[69[*Классическая разрешимость первой начально-краевой задачи для сильно вырожденного параболического уравнения* // УМЖ, т. 56, №10, 2004, с. 1299-1321.

[70[*Regularity of the solution of the free boundary problem for the porous medium equation* // Preprint IPMM NANU. Donetsk №98.07, 1998, 22 p.

[71[*The Hele-Shaw problem with surface tension in a half plane* // J. Diff. Eq, n.216, 2005, p. 439-469 (with A. Friedman).

[72[*The Hele-Shaw problem with surface tension in a half plane :A model problem* // J. Diff. Eq., n. 216, 2005, p. 387-438 (with A. Friedman).

[73[*Energy consideration m a model of nematode sperm crawling* // Mathematical Biosciences and Engineering, v. 3, n. 2 (2006), pp. 347-370 (with Yar. Bazaliy, A. Friedman and B. Hu).

[74[*Regularity of a weak solution to the first initial boundary value problem for a nonlinear degenerate parabolic equation* // Ukr. Math. Bulletin, 3(1), (2006), p. 1-30.

[75[*On a boundary value problem for a strongly degenerate second order elliptic equation in an angular domain* // Ukr. Math. J., 59, No 7, (2007), pp. 955-975, (with S.P. Degtyarev).

[76[*One-dimensional free boundary problem for actin-based propulsion of Listeria* // J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 84-100 (with Yar.Bazaliy and A.Friedman).

[77[*Classical solutions of many-dimensional elliptic-parabolic free boundary prob-lems* // Nonlinear Diff. Equ. Appl., 16, (2009), pp. 421-443 (with S.P. Degtyarev).

[78[*The initial boundary value problem in a plane angle for the heat equation* // Electronic Journal of Differential Equations, v. 2010, No. 90, (2010), pp. 1-32 (with N.V. Vasylyeva).

[79[*The transmission problem m domains with a corner point for the Laplace operator in weighted Holder spaces* // Journal of Differential Equations 249, (2010), pp. 2476-2499 (with N.V. Vasylyeva).

[80[*The Muskat problem with surface tension and a nonregular initial interface* // Journal of Nonlinear Analysis, 72, (2011), 6074-6096 (with N.V. Vasylyeva).

[81[*A classical solution of a degenerate elliptic-parabolic free boundary problem* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 7, № 4, (2011), p. 295-332 (with S.P. Degtyarev).

[82[*On the solvability of a transmission problem for the Laplace operator with a dynamic boundary condition on a nonregular interface* // Journal of Math Analysis and Applications, 393, (2012), 651-670 (with N.V. Vasylyeva).

[83[*The two-phase Hele-Shaw problem without surface tension with a nonregular initial interface* // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometrv, 10, (2014), no. 1, 3–43. (with N.V. Vasylyeva).

[84[*Граничная задача для вырождающихся на границе области эллиптических и параболических уравнений в весовых пространствах Гельдера* // Матем. сборник, Матем. сб., 204:7, (2013), с. 25–46 (совм С.П. Дегтяревым).

О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Доклады Академии Наук СССР–1966,– **169**, *№1*

1. Цель настоящей заметки заключается в том, чтобы перенести результаты, полученные в работе [1], на более общий случай, когда в граничных условиях задачи присутствуют производные функции, описывающей свободную поверхность.

Речь идет о следующей задаче. Внутри единичного круга $|z| \leq 1$, $z = x + iy$ определить кривую γ, $\rho = \rho(\sigma)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, так, чтобы в двусвязной области G_z, ограниченной окружностью Γ: $|z| = 1$, выполнялись условия:

1. Существует функция $\psi(x, y)$, гармоническая внутри G_z и непрерывная в $G_z + \gamma + \Gamma$.
2. $\psi = 0$ на Γ.
3. $\psi = c_1$, $c_1 = const. \neq 0$ на γ.
4. $|grad\psi| = q[\rho(\sigma), \rho\prime(\sigma), \rho\prime\prime(\sigma), \nu]$, где q – дважды непрерывно дифференцируемая функция всех своих аргументов, определенная по ρ в интервале $0 < \rho < 1$ и для всех значений по остальным аргументам, положительная в своей области определения; ν – некоторая совокупность численных параметров.

Подобная задача возникает в теории капиллярно-гравитационных волн. Рассмотрим в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ плоские периодические движения тяжелой жидкости с учетом поверхностного натяжения. Тогда функция q из аналога условия 4 имеет вид (закон Бернулли)

$$\bar{q} = \sqrt{c_0 - 2g\eta + 2\alpha \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{-3/2}}, \tag{1}$$

где $\eta = \eta(\xi)$ – уравнение свободной поверхности; g – гравитационная постоянная; α – коэффициент поверхностного натяжения (физическая константа жидкости); c_0 –постоянная Бернулли. После перехода к плоскости $z = x + iy$ функция (1) преобразуется в следующую:

$$q[\rho, \rho\prime, \rho\prime\prime, \nu] \equiv l(2\pi\rho)^{-1} \sqrt{c_0 + \pi^{-1} gl \ln \rho + 4\pi\alpha\rho l^{-1} (\rho\prime^2 - \rho\rho\prime\prime)(\rho^2 + \rho\prime^2)^{-3/2}}, \tag{2}$$

где l – длина волны, ν в данном случае есть совокупность параметров l и c_0.

Мы покажем, что и в рассматриваемом случае при некоторых предположениях на функцию q существует двухпараметрическое семейство решений.

2. Используя обозначения из [1], получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений для определения λ, $\mu(s)$, $\rho(s)$, к исследованию которой приводит анализ исходной задачи:

$$A_0 \equiv \int\limits_0^{2\pi} [\mu(s) + \ln q(\rho, \rho\prime, \rho\prime\prime, \nu)(s)]ds = 0,$$

$$A_1 \equiv \left| i\lambda \int\limits_0^{\sigma} exp\{i\sigma + S\mu(\sigma) + S_1 \ln q(\rho, \rho\prime, \rho\prime\prime, \nu)(\sigma)\}d\sigma + 1 \right|^2 - 1 = 0, \tag{3}$$

$$A_2 \equiv \rho^2(\sigma) - \big|1 + \lambda L + i\lambda r(\lambda) \int\limits_0^{\sigma} q^{-1}(\rho, \rho\prime, \rho\prime\prime, \nu)(\sigma) exp\{i\sigma + S_2\mu(\sigma)$$

$$+ S_0 \ln q(\rho, \rho\prime, \rho\prime\prime, \nu)(\sigma)\}d\sigma\big|^2 = 0.$$

Решение этой системы должно обеспечить однолистность функции

$$z = z(\tau) = \lambda \int\limits_1^{\tau} \exp\{F(t)\}dt + 1, \tag{4}$$

где τ – вспомогательная плоскость; в этой плоскости области G_z соответствует кольцо G_τ, внутренний радиус которого r (заранее неизвестен), а наружный 1.

Если функции $\mu(\sigma)$, $\rho(\sigma)$, $\rho\prime(\sigma)$, $\rho\prime\prime(\sigma)$ $2\pi-$периодические, то операторы A_1, A_2 ставят в соответствие каждой тройке (λ, μ, ρ) функций $\mu_1(\sigma)$, $\mu_2(\sigma)$, имеющие непрерывные по Гёльдеру производные. Действительно, в этом случае, например, $f(\sigma) \equiv q(\rho(\sigma), \rho\prime(\sigma), \rho\prime\prime(\sigma), \nu)$ – $2\pi-$периодическая функция. Поскольку имеет место представление

$$S_0 f(\sigma) = \frac{ih_0}{\pi} \ln \sin \frac{\sigma}{2} + \tilde{S}_0 f(\sigma),$$

где $h_0 = f(0) - f(2\pi)$, $\tilde{S}_0 f(\sigma) \in Lip\beta$, то в случае $h_0 = 0$ $S_0 f(\sigma)$ также принадлежит пространству Гёльдера. Операторы A_0, A_1, A_2 переводят каждую тройку $X = (\lambda, \mu, \rho)$ в тройку $X_1 = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$, где μ_0- число. Обозначим через E множество элементов X и в соответствии со сказанным введем на E норму

$$\|X\|_E = |\lambda| + \|\mu\|_{\overset{0}{Lip}\ \beta} + \|\rho\|_{\overset{0}{Lip}\ \beta} + \|\rho\prime\|_{\overset{0}{Lip}\ \beta} + \|\rho\prime\prime\|_{\overset{0}{Lip}\ \beta}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{5}$$

где $\overset{0}{Lip}\ \beta$ – означает пространство Гёльдера $2\pi-$периодических функций. E превращается в полное нормированное линейное пространство. Через E_1 обозначим банахово пространство элементов X_1 с нормой

$$\|X_1\|_{E_1} = |\mu_0| + \|\mu_1\|_{Lip\ \beta} + +\|\mu_1\prime\|_{Lip\ \beta} + \|\mu_2\|_{Lip\ \beta} + \|\mu_2\prime\|_{Lip\ \beta}. \tag{6}$$

Можно показать, что отображение $X_1 = \varphi(X, \nu)$ пространства E в E_1 непрерывно и непрерывно дифференцируемо.

Легко найти тривиальное решение X_0 системы (3), соответствующее $\psi(\rho) = c_1 \ln \rho / \ln \rho_0$, где $\rho_0 = const$ определяется из равенства

$$\rho_0 q(\rho_0, 0, 0, \nu^0) \ln \rho_0 = -|c_1|, \tag{7}$$

так что $X_0 = (q(\rho_0, 0, 0, \nu^0), -\ln(\rho_0, 0, 0, \nu^0), \rho_0)$. Будет показано, что существует решения системы, близкие к X_0 (в смысле выбранной метрики), в некоторой окрестности точки ρ_0, ν^0.

3. С этой целью вычислим производную Фреше $\varphi\prime(X_0, \nu^0; X)$ отображения $\varphi(X, \nu)$ в точке X_0 при $\nu = \nu^0$ и рассмотрим линеаризованное уравнение

$$\varphi\prime(X_0, \nu^0; X) = X_1,\ X = (\Delta\lambda, h, l) \in E,\ X_1 = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) \in E_1. \tag{8}$$

Уравнение (8) эквивалентно некоторой линейной краевой задаче для функции $\Phi_0(\tau)$, аналитической в кольце G_τ. Разложением в ряд Лорана $\Phi_0(\tau)$ задача (8) приводится к бесконечной системе линейных уравнений для коэффициентов разложения, и эта система достаточно просто решается. Искомые функции $h(\sigma)$ и $l(\sigma)$ связаны с $\Phi_0(\tau)$ соотношениями

$$\begin{aligned} h(\sigma) = Re\ \Phi_0(e^{i\sigma}),\ l'' + q_{\rho'}(\rho_0, \nu^0) q^{-1}_{\rho''}(\rho_0, \nu^0) l' + q_\rho(\rho_0, \nu^0) q^{-1}_{\rho''}(\rho_0, \nu^0) l \\ = -q(\rho_0, \nu^0) q^{-1}_{\rho''}(\rho_0, \nu^0)[Re\ \Phi_0(\rho e^{i\sigma}) + \mu]. \end{aligned} \tag{9}$$

Произвольные постоянные, появляющиеся при решении дифференциального уравнения (9), однозначно определяются из условий 2π-периодичности функций $l(\sigma)$ и $l'(\sigma)$. В дальнейшем мы рассматриваем случай $q_{\rho'}(\rho_0, 0, 0; \nu^0) = 0$, имеющий место в приложениях. Случай $q_{\rho'}(\rho_0, 0, 0; \nu^0) \neq 0$ рассматривается аналогично.

Если, как мы предположили, правая часть (8) принадлежит пространству E_1, можно показать, что первые две производные и сама функция $l(\sigma)$ непрерывны по Гёльдеру и удовлетворяют условию 2π-периодичности. Однако, для того, чтобы выполнялось условие 2π-периодичности функции $h(\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы X_1 удовлетворяло условию

$$\eta(\rho_0)\mu_0 - F(\mu_1, \mu_2) = 0, \quad \eta(\rho_0) = \frac{\pi}{12}\left[1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n}}{(1-\rho_0^{2n})^2}\right], \tag{10}$$

где $F(\mu_1, \mu_2)$ – линейный функционал. Если, кроме того, выполняются условия

$$\frac{q\rho_0^n}{q_\rho - n^2 q_{\rho''}} + \frac{n-1}{n+1}\frac{q\rho_0^{-n}}{q_\rho - n^2 q_{\rho''}} - \frac{\rho^{-n+1}}{n+1} + \frac{\rho_0^{n+1}}{n+1} \neq 0, \quad n = 1, 2, ...,$$

$$\frac{q}{q_\rho} + \rho_0 - \frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0} \neq 0,\ \rho_0 \neq e^{-1},\ q_{\rho''} \neq 0,\quad q_\rho \neq 0,\ q_\rho q_{\rho''}^{-1} \neq n^2, \tag{11}$$

где значения частных производных и сама функция $q(\rho, \rho', \rho'', \nu)$ вычисляются в точке $(\rho_0, 0, 0, \nu^0)$, то уравнение (8) однозначно разрешимо. В случае $q_\rho q_{\rho''}^{-1} = n^2$ соответствующее условие из (11) заменяется условием

$$\rho_0^n + \frac{n-1}{n+1}\rho_0^{-n} \neq 0, \tag{12}$$

которое всегда имеет место при $\rho_0 > 0$.

При этих же условиях можно показать единственность тривиального решения в некоторой малой окрестности $\rho(s) = \rho_0$ при $\nu = \nu^0$. Условие (11) для функции $q(\rho, \rho', \rho'', \nu)$ вида (2) можно переписать в терминах критических средних скоростей. Если обозначить через h среднюю глубину жидкости, то условия (11) нарушаются при

$$c_{kp.0}^2 = gh,\quad c_{kp.n}^2 = \left[\frac{gl}{2\pi n} + \frac{2\pi n\alpha}{l}\right]\tanh\frac{2\pi h}{l} n. \tag{13}$$

4. Из рассмотрения линеаризованной задачи следует, что нетривиальные решения могут возникать при нарушении условий (11). Однако, можно показать, что нетривиальные решения существуют и при выполнении этих условий, если считать параметры ν_1, $\nu_2, \ldots$ переменными в некоторой (вообще говоря, малой) окрестности точки $\nu = \nu^0(\nu_1^0, \nu_2^0, \ldots)$. Используя теорему о неявных функциях в функциональных пространствах, можно показать справедливость теоремы 3 из [1] при более общих условиях на функцию q.

Теорема 1. *Пусть функция q зависит от $\rho(\sigma)$ и ее первых двух производных, а также от n (существенных) параметров. Если в точке (ρ_0, ν^0) выполнены условия (11) и $q_{\nu_i} \neq 0$, $\eta(\rho_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $\rho = \rho_0$ существует $(n-1)-$ параметрическое семейство решений, отличных от тривиального $\rho = \rho_0$.*

Тем самым доказано, что решением задачи о капиллярно-гравитационных волнах является двухпараметрическое семейство периодических волн.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.И. Данилюку за постановку задачи и ряд ценных советов.

Список литературы

[1] Данилюк И.И. Об одной нелинейной задаче со свободной границей, *Докл. АН СССР* **162** (1965) 979–982.

О СПЕКТРЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Математическая Физика–1968,–№5

Рассмотрим нелинейную задачу. Требуется найти внутри круга $|z| \le 1$, $z = x+iy$ линию $\gamma : \rho = \rho(\delta)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, так, чтобы в двусвязной области G_z, ограниченной γ и единичной окружностью $\Gamma : |z| = 1$, выполнялись следующие условия:

1. существует функция $\psi(x, y)$, гармоническая внутри G_z и непрерывная в $G_z + \Gamma + \gamma$;
2. $\psi = 0$ на Γ и $\psi = 1$ на γ;
3. функция $|grad\ \psi|$ непрерывна на $G_z+\gamma$ и удовлетворяет равенству $|grad\ \psi| = q$ (обобщенный интеграл Бернулли) на линии γ, функция q считается заданной.

Предполагаем, что $q = q(\rho; \nu)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, положительная и аналитическая по ρ и числовым параметрам ν.

Задача $1) - 3)$ сводится к системе трех нелинейных уравнений

$$A_i(\lambda, \mu, \rho; \nu) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

причем A_0– функционал. Неизвестными являются число λ и пара функций $\mu = \mu(s)$, $\rho = \rho(s)$. Явный вид операторов A_i приведен в работе [1]. Система (1) имеет тривиальное решение $\omega_0 = (q(\rho_0; \nu^0); -\ln q(\rho_0; \nu^0); \rho_0)$; ρ_0 удовлетворяет равенству

$$\rho_0 q(\rho_0; \nu^0) \ln \rho_0 = -1, \quad 0 < \rho_0 < 1, \tag{2}$$

при некоторых фиксированных значениях параметров ν^0. Этому решению соответствует "симметричное" решение $\rho = \rho_0 = const$ задачи $1) - 3)$.

Пусть E, E_1– банаховы пространства троек соответственно $\omega = (\lambda, \mu, \rho)$ и $\omega_1 = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$, введенные в работе [1]. Тогда формулы $\mu_i = A_i(\lambda, \mu, \rho; \nu)$, $i = 0, 1, 2$, задают непрерывное (даже аналитическое) отображение $\omega_1 = \varphi(\omega; \nu)$ пространства E в пространство E_1. Линеаризуя φ в точке (ω_0, ν^0), получим уравнение

$$\varphi'(\omega_0, \nu^0; X) = X_1, \quad X \in E, \quad X_1 \in E_1, \tag{3}$$

где слева – дифференциал Фреше оператора φ относительно ω. Рассмотрим случай, когда

$$\rho_0 \ne \frac{1}{e}; \quad \eta(\rho_0) \equiv \frac{\pi}{12}\left[1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_0^{2n}}{(1-\rho_0^{2n})^2}\right] \ne 0.$$

В работе [1] отмечено, что при выполнении условий

$$\frac{q(\rho_0;\nu^0)}{q'_\rho(\rho_0;\nu^0)}+\rho_0-\frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0}\neq 0,$$

$$\frac{q(\rho_0;\nu^0)}{q'_\rho(\rho_0;\nu^0)}\rho_0^n+\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{q(\rho_0;\nu^0)}{q'_\rho(\rho_0;\nu^0)}\rho_0^{-n}-\frac{\rho_0^{-n+1}}{1+n}+\frac{\rho_0^{n+1}}{1+n}\neq 0,$$
$$n=1,2,..., \tag{4}$$

уравнение (3) имеет (единственное) решение тогда и только тогда, когда правая часть $X_1=(\mu_0,\mu_1,\mu_2)$ удовлетворяет равенству

$$\eta(\rho_0)\mu_0-H(\mu_1,\mu_2)=0, \tag{5}$$

где $H(\mu_1,\mu_2)$– вполне определенный линейный функционал на подпространстве E_2 : $\mu_0=0$ пространства E_1. При нарушении условий (4) подпространство нулей оператора $\varphi'(\omega_0,\nu^0;X)$ не пусто. Здесь рассматривается случай, когда нарушается первое из условий (4)

$$\frac{q(\rho_0;\nu^0)}{q'_\rho(\rho_0;\nu^0)}+\rho_0-\frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0}=0,\quad 0<\rho_0<1, \tag{6}$$

а остальные условия выполняются.

Введем временно новые обозначения $x=\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$, $x\in\overset{(n)}{E}$, $y=X=(\lambda,\mu,\rho)\in E$, $z=(0,\mu_1,\mu_2)=(\mu_1,\mu_2)\in E_2$ и рассмотрим оператор

$$z=F(x,y):\ \mu_i=A_i(\lambda,\mu,\rho;\nu),\quad i=1,2, \tag{7}$$

который действует из пространства $\overset{(n)}{E}\times E$ в E_2. В силу принятых предложений оператор F можно разложить в ряд Тейлора

$$F(x,y)=\sum_{r,s\geq 1}C^r_{r+s}F_{rs}g^rh^s,\quad h=x-x_0,\quad g=y-y_0,$$

$$F_{rs}=\frac{1}{(r+s)!}\cdot\frac{\partial^{r+s}F(x_0,y_0)}{\partial x^s\partial y^r},\quad F(x_0,y_0)\neq 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$By\equiv -F'_y(x_0,y_0;y)=z,\quad B:E\to E_2. \tag{8}$$

Можно доказать, что при условии (6) однородное уравнение (8) имеет одномерное пространство решений, базисом в котором может быть выбран вектор $\varphi=$

$\left(-\frac{1}{q(\rho_0;\nu^0)}, \frac{1}{q'_\rho(\rho_0;\nu^0)}, 1\right)$, а неоднородное уравнение (8) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_1(\sigma)d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_2(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}[\mu_1'(0)-\mu_1'(2\pi)]\left(\frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0}-1\right)$$

$$+\left(\frac{2\rho_0\ln^2\rho_0}{\pi(1+\ln\rho_0)}+\frac{\rho_0}{\eta(\rho_0)(1+\ln\rho_0)}\right)H(\mu_1,\mu_2) = < z,\psi > = 0. \qquad (9)$$

Таким образом, оператор B нормально разрешимый в смысле Хаусдорфа, причем подпространство $E' \in E$ нулей оператора B и подпространство нулей сопряженного оператора B имеют размерности соответственно $n=1$ и $m=1$. Согласно теореме Банаха-Хана существует такой функционал $\gamma\in E^*$ и элемент $z\in E_2$, что $<\varphi,\gamma>=1$, $<z,\psi>=1$.

Вопрос о существовании решений уравнения $F(x,y)=0$ при условиях $n>0, m>0$, сводится к построению и исследованию так называемого уравнения разветвления. В нашем случае, если $n=m=1$ и оператор F аналитический, это уравнение имеет вид (см., например, работу [3], §4)

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty}\xi^k\sum_{l=1}^{\infty} L_{kl}\zeta^l = 0. \qquad (10)$$

В этом уравнении ξ и ζ-действительные числовые параметры, $h=\zeta h_1$ где $h_1=(h_{11},h_{12},...,h_{1n})$- какой-либо зафиксированный единичный вектор в пространстве $\overset{(n)}{E}$,

$$L_{01} = < F_{01}h_1,\psi >,\ L_{02} = < F_{02}h_1^2 + 2F_{11}(\Gamma F_{01}h_1)h_1 + F_{20}(\Gamma F_{01}h_1)^2,\psi >,$$

$$L_{11} = 2 < F_{11}h_1\varphi + F_{20}\varphi\Gamma F_{01}h_1,\psi >,\ \ L_{20} = < F_{20}\varphi^2,\psi >,\ \Gamma = (B- < \cdot,\gamma > z)^{-1}.$$

Предположим, что уравнение (10) уравнение имеет действительное решение $\xi=\xi(\zeta)$, разлагающееся в ряд по целым степеням ζ и стремящееся к нулю вместе с $\zeta\to 0$. Тогда уравнение $F=0$ имеет решение $y=y(\zeta)$, которое стремится к y_0 при $\zeta\to 0$. Беря полную производную по ζ от тождества $F(x(\zeta),y(\zeta))\equiv 0$ и полагая затем $\zeta=0$, получаем уравнение (8) при $z=F_{01}h_1$. Поскольку это уравнение имеет решение, необходимо, чтобы выполнялось условие (9):

$$L_{01} = < F_{01}h_1,\psi > = 0. \qquad (11)$$

Введем обозначение $m_0=\sum_{i=1}^n q'_{\nu_i}(\rho^0;\nu^0)h_{1i}/q(\rho_0;\nu^0)$; непосредственные вычисления показывают, что условие (11) можно записать в виде

$$m_0\left[\frac{q(\rho_0;\nu^0)}{q'_\rho(\rho_0;\nu^0)} - \rho_0 - \frac{2\eta(\rho_0)}{\pi}\rho_0\ln\rho_0\right] = 0. \qquad (12)$$

Если скобка равна нулю, то условие (11) выполняется при любом h_1, однако ρ_0, как следует отсюда и из равенства (6), должно удовлетворять уравнению

$$2\eta(\rho_0) + \pi \frac{1 + 2\ln\rho_0}{(1+\ln\rho_0)\ln\rho_0} = 0.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\rho_0^{(1)} \approx 6,294 \cdot 10^{-6}, \quad \rho_0^{(2)} \approx 0,496.$$

Дальнейшие вычисления показывают, что $L_{20} = a$, $L_{11} = bm_0$, $L_{02} = cm_0^2$, где $a = 902,6 \cdot 10^{-6}$, $b = -3,99$, $c = 3,92 \cdot 10^4$ на первом корне $\rho_0^{(1)}$ и $a = 0,579$, $b = -88,62$, $c = -145,32$ на втором корне ρ_0^2. Уравнение разветвления можно переписать в виде

$$a\xi^2 + bm_0\xi\zeta + cm_0^2\zeta^2 + ... = 0, \tag{13}$$

где многоточие заменяет члены высших порядков. Дискриминант этого трёхчлена

$$\Delta = L_{11}^2 - 4L_{02}L_{20} = m_0^2(b^2 - 4ac),$$

причем $b^2 - 4ac < 0$ на первом корне и $b^2 - 4ac > 0$ на втором корне. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $\rho_0 = \rho_0^{(2)}$ *и вместе с начальными значениями параметров* $\nu^0 = (\nu_1^0, \nu_2^0, ..., \nu_n^0)$ *удовлетворяет уравнениям* (2), (6) *и пусть в точке* (ρ_0, ν^0) *выполняются все условия* (4), *кроме первого, а функция* $q(\rho;\nu)$ *положительная и аналитическая по* (ρ, ν). *Если* $q_{\nu_1}'^2(\rho_0;\nu^0) + ... + q_{\nu_n}'^2(\rho_0;\nu^0) > 0$, *то пара уравнений* (7) *имеет два действительных и различных решения* $y^{(i)} = (\lambda^{(i)}, \mu^{(i)}, \rho^{(i)})$, $i = 1, 2$, *эти решения определены в некоторой окрестности точки* ν^0, *вне плоскости* $m_0 = 0$ *и при* $\nu \to \nu^0$ *стремятся к тривиальному решению* ω_0.

В неспектральном случае система (7) имеет одно решение, определенное в полной окрестности точки ν^0 [1].

Подставляя решение системы (7) в первое уравнение (1), получим уравнение

$$f(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \equiv A_0(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) = 0, \tag{14}$$

которому должны удовлетворять параметры задачи. Это уравнение удовлетворяется в точке ν^0. Непосредственные вычисления показывают, что все первые частные производные функции $f(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ в точке $\nu = \nu^0$ равны нулю. Это заставляет рассматривать второй дифференциал функции f в точке ν^0. Полагая для простоты, что $n = 2$, обозначая $m_{0i} = \frac{q_{\nu_i}}{q}$, $s = \frac{qq''_{\rho\rho} - q_\rho'^2}{q_\rho'^2}$ (при $\rho = \rho_0$, $\nu = \nu^0$) и опуская вычисления, запишем выражение для $d^2 f(\nu^0)$ в окончательном виде:

$$\frac{1}{\pi} d^2 f(\nu^0) = (m_{01}^2 h_1^2 + m_{02}^2 h_2^2)\left(-A^2 + \xi_\sigma B^2 + \frac{s\xi_\sigma^2}{q^2}\right) + 2m_{01}m_{02}h_1h_2$$

$$\times \left(-A^2 + \xi_\sigma B^2 + \frac{s\xi_\sigma^2}{q^2} + sC^2 \right); \tag{15}$$

в этой формуле положительные постоянные A^2, B^2, C^2 вполне определенные и не зависят от конкретного вида функции $q(\rho;\nu)$, а $2\xi_\sigma = b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$, $\sigma = 1, 2$. Пусть Δ_1– дискриминант формы (15). Если $\Delta_1 > 0$, то в плоскости параметров (h_1, h_2) существуют два различных направления, вдоль которых $d^2 f(\nu^0)$ обращается в нуль; при этом s не равно нулю. Предполагая $m_{01} \neq 0$, $m_{02} \neq 0$, получим

$$\frac{1}{\pi} d^2 f(\nu^0)|_{m_0=0} = -2m_{01}^2 h_1^2 C^2 s \neq 0,$$

следовательно, указанные направления не совпадают с направлением $m_0 = 0$. Отсюда вытекает, что уравнение (14) по обе стороны прямой $m_0 = 0$ имеет два различных решения $\nu_2 = \nu_2(\nu_1)$. Заметим также, что $\Delta_1 > 0$, если $s < 0$.

Из всего изложенного вытекает следующая теорема.

Теорема существования. *Пусть выполняются все условия леммы и пусть, кроме того,* $n = 2$, $m_{01} \neq 0$, $m_{02} \neq 0$. *Если* $\Delta_1 > 0$, *то задача 1)–3) имеет по крайней мере однопараметрическое семейство решений, которое стремится к тривиальному при* $\nu_1 \to \nu_1^0$. *Утверждение теоремы справедливо, в частности, если*

$$s = \frac{q(\rho_0;\nu^0) q''_{\rho\rho}(\rho_0;\nu^0) - q'^2_\rho(\rho_0;\nu^0)}{q'^2_\rho(\rho_0;\nu^0)} < 0. \tag{16}$$

Задача о поверхностных волнах в поле сил земного тяготения над плоским дном приводит к функции

$$q \equiv \frac{l}{C_1 2\pi\rho} \sqrt{C_0 + \frac{gl \ln \rho}{\pi}},$$

где C_1– расход, C_0– постоянная Бернулли, l– длина волны ($\nu = (C_0, C_1, l)$). Спектральность начальных данных параметров (C_0, C_1, l) означает, что число Фруда равно единице, т.е. скорость движения равна критической $\sqrt{gh}$. В этом случае $s = -26 < 0$.

В заключение заметим, что все изложенные соображения переносятся на случай, когда функция q зависит также от ρ', ρ'' [2].

Список литературы

[1] Данилюк И.И. Об одной нелинейной задаче со свободной границей, *Докл. АН СССР* **162** (1965) 979–982.

[2] Базалий Б.В. О волновых движениях жидкости с учетом поверхностного натяжения, *Докл. АН СССР* **169** (1966) 1247–1249.

[3] Вайнберг М.М., Треногин В.А., *УМН* **17**, 2 (104), 13 (1962) 979–982.

ПРО РОЗГАЛУЖЕННЯ КРИТИЧНИХ ТОЧОК ФУНКЦІОНАЛІВ, ОЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛАМИ ЗІ ЗМІННОЮ ОБЛАСТЮ ІНТЕГРУВАННЯ

Доповіді АН УРСР–1970,–№1

1. Нехай Γ – деяка проста достатньо гладка лінія на площині $z = x + iy$ і нехай в області G, обмеженій Γ, задано невід'ємну достатньо гладку функцію $Q(x, y)$. Позначимо через $G_\gamma \subset G$ двозв'язне криволінійне кільце, обмежене зафіксованою лінією Γ і деякою достатньо гладкою змінною лінією γ (так званою "вільною границею"), і розглянемо сукупність функціоналів

$$I(\psi, \gamma; \lambda, c) \equiv \int_{G_\gamma} \{\psi_x^2 + \psi_y^2 + Q^2(x, y) - \lambda\} dxdy + \lambda c^2; \tag{1}$$

в цій формулі ψ – достатньо гладка в G_γ функція, що дорівнює нулеві на Γ і одиниці на γ, c^2 – зафіксоване дійсне число, менше від площі області G, λ – дійсний числовий параметр. Нехай при деякому λ пара (ψ, γ) має класичні диференціальні властивості і є критичною точкою функціоналу (1) на множині всіх допустимих пар (ψ, γ). Застосовуючи міркування, наведені в [1], неважко переконатися, що тоді $\psi(x, y)$ є гармонійною функцією струму кільця G_γ, на вільній границі якого γ задовольняється узагальнена умова Бернуллі $|grad\ \psi|^2 = Q^2 - \lambda$. Якщо площа кільця G_γ дорівнює c^2, то пара (ψ, γ) є розв'язком ізопериметричної задачі, в якій треба знайти всі критичні точки (ψ, γ) функціоналу (1) при деякому $\lambda = 0$ на множині всіх пар, для яких площа G_γ дорівнює c^2. З аналогічних міркувань випливає, що і навпаки: кожен розв'язок (ψ, γ) цієї ізопериметричної задачі є критичною точкою функціоналу (1) при деякому λ відносно всіх допустимих пар (ψ, γ), причому площа кільця G_γ дорівнює c^2, а параметр λ відіграє роль множника Лагранжа.

Вказана ізопериметрична задача є еквівалентною гідродинамічній проблемі про хвильовий рух ідеальної нестисливої рідини. Такий рух описується гармонійною функцією струму ψ кільця G_γ, причому на лінії γ, яка визначає геометрію хвилі, задовольняється узагальнений закон Бернуллі $|grad\ \psi|^2 = Q^2 + const$. Площа c^2 розшукуваного кільця G_γ характеризує кількість рідини, що рухається. Сказане вище означає, що ми відшукаємо всі такі хвильові рухи, якщо в множині всіх "абсолютних"критичних точок функціоналу (1) знайдемо ті, у яких кільце G_γ має площу c^2.

2. Варіаційний підхід до цієї гідродинамічної задачі дав можливість в [1] розв'язати проблему існування при умовах, що не накладають ніяких обмежень на функціональну структуру силової функції Q. Метою нашої статті є вивчення критичних

точок функціоналу (1) і їх розгалуження в припущенні, що Γ – коло $|z| = 1$ і $Q(x, y) = q(\rho; \nu)$, де $\rho^2 = x^2 + y^2$, а $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – деяка система числових параметрів; згадана вище теорема існування може давати в цьому випадку "геометрично тривіальні" розв'язки $\gamma: \ |z| = \rho_0 < 1$. Окрім цього, на вказаному прикладі ми зможемо проілюструвати деякі загальні твердження роботи [2].

Якщо (ψ, γ) – критична точка функціоналу (1), то $\psi(x, y)$ – гармонійна функція струму в кільці G_γ. Спряжена до неї гармонійна функція $\varphi(x, y)$ має приріст $\nu \neq 0$ вздовж кожної гомотопної до γ лінії. Функція $\tau = exp\{2\pi i(\varphi + i\psi)/\nu\} \equiv \tau(z)$, як можна переконатися, конформно і однолистно відображає G_γ на кільце $G_\rho : \rho < |\tau| < 1$ при деякому $\rho > 0$. Нехай $z = z(\tau)$ – відповідна обернена функція. Тоді $I(\psi, \gamma; \lambda, c) \equiv I_1(\rho, z; \lambda, c)$, де

$$I_1(\rho, z; \lambda, c) \equiv -\frac{2\pi}{\ln \rho} + \int\int_{G_\rho} \{q^2(z, \nu) - \lambda\} \left|\frac{dz}{d\tau}\right|^2 d\xi d\eta + \lambda c^2, \quad (2)$$

і пара (ρ, z) є критичною для функціоналу (2). Навпаки, якщо пара (ρ, z) є критичною точкою функціоналу (2), то функція $\psi = \ln|\tau(z)|/\ln \rho$ разом з лінією $\gamma: \ z = z(\rho\ e^{i\sigma})$ утворюють критичну пару функціоналу (1) [2]. Завжди можна вважати, що $z(1) = 1$. Будемо розшукувати функцію $z(\tau)$ у вигляді $\tau\ expF(\tau)$, і оскільки допустимою аналітична функція $z(\tau)$ є лише тоді, коли вона взаємно однозначно відображає коло $|z| = 1$ на коло $|\tau| = 1$ і $z(1) = 1$, то $F(1) = 0$ і $Re\ F(e^{i\sigma}) = 0$, $0 \leq \sigma \leq 2\pi$. Якщо позначити через a_n, b_n, коефіцієнти Фур'є функції $f(\sigma) = Re\ F(\rho e^{i\sigma})$, то для $F(\tau)$ неважко отримати формулу

$$F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}}(\tau^{-n} - \tau^n) + \sum_{n=1}^{\infty} ib_n \frac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}}(\tau^{-n} + \tau^n) - 2i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}}. \quad (3)$$

Очевидно, з іншого боку, що кожна функція виду (3) породжує згідно з формулою $z(\tau) = \tau expF(\tau)$ допустиму функцію для функціоналу (2), якщо $z(\tau)$ однолистна і $\rho expf(\sigma) < 1$. Функції виду (3) аналітично продовжуються через коло $|\tau| = 1$, а щоб охарактеризувати їх диференціальні властивості на колі $|\tau| = \rho$, припустимо, що сходиться ряд із загальним членом $n^4(a_n^2 + b_n^2)$. Це припущення є еквівалентним тому, що $f(\sigma)$ має першу і другу узагальнену похідну з простору $L_2(0, 2\pi)$. Оскільки тоді $f'(\sigma) \in Lip\ \alpha$, $\alpha \leq 1/2$, то лінія $\gamma: \ z = z(\rho e^{i\sigma})$ задовольняє умови Ляпунова. Сукупність H пар (ρ, X), де $X = (a_1, b_1, ...)$, є, очевидно, координатним записом гільбертового простору $R \times W_2^{(2)}(0, 2\pi)$. Підставляючи функцію (3) в формулу $z(\tau) = \tau\ exp\ F(\tau)$, а потім у праву частину формули (2), отримаємо функціонал

$$\tilde{J}(\rho, X) \equiv \tilde{J}(\rho, a_1, b_1, a_2, b_2, ...) \equiv I_1(\rho, \tau expF(\tau); \lambda, c), \quad (4)$$

означений, а якщо $q(\rho; \nu)$ є достатньо гладкою по ρ, то і диференційований певну кількість разів у просторі H. Таким чином, пошук критичних пар (ρ, z) для функціоналу (2) зводиться до аналогічної задачі для функціоналу (4), а ця остання є еквівалентною до рівняння

$$U(\rho, X; \nu) = 0, \tag{5}$$

ліва частина якого – це оператор $U \equiv (\partial\tilde{J}/\partial\rho, k^{-1}\partial\tilde{J}/\partial a_k, k^{-1}\partial\tilde{J}/\partial b_k)$, $k = 1, 2, ...$, який діє,як можна переконатися, в просторі H при будь-якому зафіксованому $\nu \in E^n$ $(U \equiv grad_{(\rho,x)}\tilde{J}(\rho, X; \nu))$.

3. Рівняння (5) має розв'язок $(\rho_0, 0, \nu_0)$, якщо величини ρ_0, λ і ν_0 задовольняють рівняння

$$\frac{1}{\rho_0^2 \ln^2 \rho_0} - q^2(\rho_0; \nu_0) + \lambda = 0, \quad 0 < \rho_0 < 1. \tag{6}$$

Ми вкажемо умови, за яких рівняння (5) має розв'зок $(\rho(\nu), X(\nu)) \in H$, який при $\nu \to \nu_0$ прямує до $(\rho_0, 0)$. Іншими словами, ми дослідимо умови розгалуження геометрично тривіальної критичної точки (ρ_0, τ) функціоналу (2). Похідна Фреше оператора U по парі $(\rho, X) \in H$ є оператором $U'_{(\rho,x)}(\rho_0, 0; \nu_0)(l, Y)$, $(l, Y) \in H$, $Y = (\alpha_n, \beta_n)$, матриця якого, як показують безпосередні обчислення, має діагональний вигляд; більш точно

$$U'_{(\rho,x)}(\rho_0, 0; \nu_0)(l, Y) = (c_0 l, c_1\alpha_1, c_1\beta_1, ..., c_k\alpha_k, c_k\beta_k, ...), \tag{7}$$

де

$$c_0 = 2\pi\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho\ln^2\rho} - \rho(q^2(\rho; \nu_0) - \lambda)\right]\Bigg|_{\rho=\rho_0},$$

$$c_k = \frac{\pi}{k}\left(\frac{\rho_0^k}{1-\rho_0^{2k}}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho^2(\rho^{-k} - \rho^k)^2(q^2(\rho; \nu_0) - \lambda)]\Big|_{\rho=\rho_0}^{\rho=1}, \ k = 1, 2, ... \tag{8}$$

Радіус $\rho_0 < 1$ з площею c^2, пов'язаний формулою $\rho_0 = \sqrt{1 - c^2/\pi} > 0$. З другої формули (8) випливає, що $c_k - 2\pi\rho_0^2[q^2(\rho_0; \nu_0) - \lambda]$ при $k \to \infty$, отже, в силу (6) оператор (7) має обмежений обернений, якщо $c_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, ...$. За цих умов пара $(\rho_0, 0)$ є ізольованою критичною точкою функціоналу (4) при $\nu = \nu_0$ (порівн. теорему 5, [2]), а продовження розв'язку $(\rho_0, 0)$ рівняння (5) по параметру ν, яке можна отримати, спираючись на теорему про неявну функцію, приводить до одних тільки геометрично тривіальних розв'язків.

З огляду на це розглянемо випадок, коли $c_m = 0$ при деякому $m \geq 1$ і $c_k \neq 0$ при всіх $k \neq m$. Умова $c_m = 0$ дає можливість знайти значення параметра λ:

$$\lambda = \lambda_m \equiv q^2(\rho_0; \nu_0) + \frac{\rho_0}{(m+1)}\frac{\rho_0^m - \rho_0^{-m}}{\rho_0^m + \rho_0^{-m}\frac{m-1}{m+1}}\frac{\partial}{\partial\rho}q^2(\rho; \nu_0)\Bigg|_{\rho=\rho_0}, \tag{9}$$

при якому оператор (7), зберігаючи властивості нормальної розв'язувальності, має двовимірний підпростір нетривіальних (ненульових) розв'язків однорідного рівняння. Питання про розв'язки нелінійного рівняння (5) за таких умов зводиться до побудови і дослідження так званого рівняння розгалуження (див., напр., [3]). В нашому випадку це рівняння зводиться до системи двох нелінійних трансцендентних рівнянь. В зв'язку з цим ми розглянемо розгалуження критичних точок функціоналу в просторі $H_1 \subset H$, де H_1 – сукупність пар (ρ, X_1), $X_1 = (a_1, a_2, ...)$. В цьому разі рівняння розгалуження є одновимірним і, якщо припустити аналітичність функції $q(\rho; \nu)$ в точці $q(\rho_0; \nu_0)$ воно матиме вигляд

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{l=1}^{\infty} L_{kl}\zeta^l = 0, \tag{10}$$

де ζ–довжина вектора $\nu - \nu_0 \in E^n$, L_{kl}– певні функціонали над вектором $(\nu - \nu_0)/\zeta$, ξ– невідома дійсна змінна. Аналіз рівняння (10) показує, що воно допускає розв'язки вигляду

$$\xi = \xi_0 + o(\zeta^{1/2}), \quad \xi_0 = 0, \quad \pm\sqrt{-L_{11}L_{30}^{-1}}, \tag{11}$$

де позначено

$$L_{11} = m^3 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \nu_i} \frac{\partial^2 \widetilde{J}}{\partial a_m^2} \mu_i + \frac{2\pi\rho_0 m^3}{c_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \nu_i} q^2(\rho_0; \nu_0)\mu_i \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \widetilde{J}}{\partial a_m^2},$$

$$L_{30} = \frac{m^3}{3} \frac{\partial^4 \widetilde{J}}{\partial a_m^4} - \frac{m^2}{2c_{2m}} \frac{\partial^3 \widetilde{J}}{\partial a_m^2 \partial a_{2m}}, \ \nu - \nu_0 = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \equiv \mu. \tag{12}$$

Всі похідні в цих формулах беруться в точці $(\rho_0, 0, \nu_0)$ при $\lambda = \lambda_m$ і на підставі формул (4), (3) і (9) можуть бути виписані явно через функцію q і її похідні в точці (ρ_0, ν_0); за браком місця ми не наводимо цих формул.

4. Для того, щоб функції (11) мали сенс і були дійсними, припустимо, що

$$L_{30} \neq 0, \quad -L_{11}/L_{30} \geq 0. \tag{13}$$

За цих умов (5) має (дійсний) розв'язок $(\rho(\mu), X_1(\mu))$, який при$\mu = \nu - \nu_0 \to 0$ прямує до $(\rho_0, 0)$. Щоб відповідне кільце $G_{\gamma(\mu)}$ мало площу c^2, розглянемо функцію

$$f_1(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) = \int\int_{G_{\gamma(\mu)}} dxdy - c^2 = \int\int_{G_{\rho(\mu)}} e^{2ReF(\tau;\mu)} \left|1 + \tau \frac{dF(\tau;\mu)}{d\tau}\right|^2 d\xi d\eta - c^2 \tag{14}$$

і спробуємо обернути її в нуль за рахунок деякої функціональної залежності між параметрами $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Безпосередні розрахунки показують, що для будь-якого $i = 1, 2, ..., n$, маємо

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu_i}\Big|_{\mu=0} = -2\pi \left| \frac{2\pi\rho_0}{c_0} \frac{\partial}{\partial \nu_i} q^2(\rho_0; \nu) - \frac{1}{c_0} \frac{\partial^3 \tilde{J}}{\partial \rho \partial a_m^2} \frac{\partial \xi_0^2}{\partial \mu_i} \right| + 2\pi(m+1) \left(\frac{\rho_0^m}{1 - \rho_0^{2m}} \right)^2 \rho_0^2$$

$$\left(\rho_0^m + \rho_0^{-m}\frac{m-1}{m+1}\right)\frac{\partial \xi_0^2}{\partial \mu_i}\Big|_{\rho=\rho_0}^{\mu=0}. \tag{15}$$

Таким чином, якщо права сторона цієї формули, скажемо, при $i = 1$ не дорівнює нулеві, то внаслідок рівності $f_1(0, 0, ..., 0) = 0$ і на підставі теореми про неявну функцію згадана вище залежність $\mu_1 = \mu_1(\mu_2, ..., \mu_n)$ існує, є неперервною і $\mu_1(0, ..., 0) = 0$. Очевидно, що при достатньо малій довжині вектора $(\mu_2, ..., \mu_n)$ відповідна функція $z(\tau) = \tau \exp\ F(\tau; \mu)$ буде однолістною.

Виключаючи параметр λ з рівностей (6) і (9), приходимо до умови

$$\frac{1}{\rho_0^2 \ln^2 \rho_0} + \frac{\rho_0}{m+1}\frac{\rho_0^m - \rho_0^{-m}}{\rho_0^m + \frac{m-1}{m+1}\rho_0^{-m}}\frac{\partial}{\partial \rho} q^2(\rho; \nu_0)\big|_{\rho=\rho_0} = 0, \tag{16}$$

яку повинні задовольняти значення (ρ_0, ν_0). Число λ знаходимо тоді за формулою (9).

Теорема. Нехай Γ – коло $|z| = 1$, $c^2 < \pi$ – задане додатне число і $\rho_0 = \sqrt{1 - c^2/\pi} > 0$. Припустимо, далі, що $Q^2(x, y) \equiv q^2(\rho; \nu)$ – задана додатна функція від ρ, $\rho^2 = x^2 + y^2$, і системи $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ дійсних параметрів і що значення ν_0 при деякому $m \geq 1$ задовольняють умову (16), а число λ має значення правої частини формули (9). Будемо вважати, нарешті, що $q^2(\rho; \nu)$ аналітична в деякій околиці точки (ρ_0, ν_0) і що всі величини (8) при $k \neq m$ і похідна (15) при $i = 1$ не дорівнюють нулеві. Якщо при деяких $\mu = \nu - \nu_0 \neq 0$ виконуються умови (13), то функціонал (2), а отже, і функціонал (1), в деякій околиці геометрично тривіальної критичної точки (ρ_0, τ) має дві $(n-1)-$ параметричні системи критичних точок $(\rho, z(\tau))$, відповідні кільця яких G_γ, $\gamma : z = z(\rho e^{i\sigma})$, мають площу c^2.

Зауважимо додатково, що вільна границя γ має параметричне представлення $(0 \leq \sigma < 2\pi,\ \mu_1 = \mu_1(\mu_2, ..., \mu_n))$

$$r = r(\sigma) \equiv \rho(\mu) \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mu) \cos n\sigma\right\}, \quad \varphi = \varphi(\sigma) \equiv \sigma + Im\ F(\rho(\mu)e^{i\sigma}; \mu),$$

$$\{a_n(\mu)\} \equiv X_1(\mu),$$

задовольняє умови Ляпунова, і разом з функцією $\psi(x, y) = \ln|\tau(z)|/\ln\rho$ являє розв'язок вказаної в п. 1 гідродинамічної задачі. Всі ці розв'язки геометрично нетривіальні при $\mu \neq 0$ і прямують до геометрично тривіального розв'язку при $\mu = \nu - \nu_0 \to 0$.

Література

[1] Данилюк И.И. Теорема существования в одной нелинейной задаче со свободной границей, *УМЖ* **20**, 25 (1968) 25–33.

[2] Данілюк І.І. Дослідження одного класу функціоналів, означених інтегралами зі змінною областю інтегрування, *Доп. АН УРСР* **9** (1969) 787–790.

[3] Вайнберг М.М., Треногин В.А., *УМН* **17**, 2 (104), 13 (1962) 979–982.

О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ С ОБОБЩЕННЫМ ЗАКОНОМ БЕРНУЛЛИ, СОДЕРЖАЩИМ КРИВИЗНУ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Математическая Физика–1970,– №7

Рассматривается один класс нелинейных задач со свободной границей. Требуется определить один из контуров границы искомой области, внутри которой должна существовать гармоническая функция тока, а на свободной границе должно к тому же выполняться некоторое условие типа интеграла Бернулли. В работе изучаются вопросы существования и ветвления решений для того случая, когда данное обобщенное условие Бернулли содержит не только координаты искомой границы, но и ее кривизну.

1. Постановка задачи. Интегральные уравнения

Пусть Г – единичная окружность на плоскости $z = x + iy$. Требуется определить двусвязную область G_z ("кольцо"), ограниченную кривой Г и некоторой неизвестной простой замкнутой кривой $\gamma : \rho = \rho(\varphi)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, так, чтобы выполнялись условия:

1) внутри G_z существует дважды непрерывно дифференцируемая однозначная функция $\psi(x, y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа и непрерывная вплоть до границ;

2) $\psi = 0$ на Г, $\psi = 1$ на γ;

3) производные ψ_x, ψ_y существуют вплоть до границ и удовлетворяют на γ условию: $|grad\ \psi| = q(\rho, k, \nu)$, где q – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная по ρ на интервале $0 < \rho < 1$ и для всех значений по остальным аргументам, строго положительная в своей области определения; k – кривизна "свободной границы" γ; ν – некоторая совокупность численных параметров.

Для случая $q = Q(x, y)$ задача рассмотрена А. Бейрлингом [1]. В этой работе мы следуем идеям И.И. Данилюка [2], который предложил аналитический метод исследования задачи для случая, когда функция q зависит только от расстояния точек свободной границы до начала координат (см. также статью в настоящем сборнике).

Постановка задачи является обобщением проблемы существования перманентных волн на поверхности жидкости с учетом массовых сил и сил поверхностного натяжения. Задача такого вида возникает, например, при рассмотрении перманентных движений невесомой жидкости, заполняющей цилиндр бесконечной высоты, который вращается с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$. Интеграл Бернулли на свободной поверхности, как легко показать, имеет вид

$$|grad\ \psi|^2 = C_0^2 + \omega^2\rho^2 + 2\alpha k,$$

где C_0 – некоторая постоянная. В качестве примера будут рассмотрены капиллярно-гравитационные волны на поверхности жидкости в канале постоянной конечной глубины. Капиллярно-гравитационные волны ранее изучались Я.И. Секерж- Зеньковичем [3] и Г. Беккертом [4].

1. По функции $\psi(x, y)$ построим аналитическую функцию $\chi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ – комплексный потенциал течения. Функция $\chi(z)$ многозначна, вдоль каждого пути гомотопного γ она приобретает вещественный период

$$\tilde{\nu} = \int_\gamma q(\rho, k, \nu) ds. \tag{1}$$

Поскольку γ требует определения, то и число $\tilde{\nu}$ должно находиться в результате решения задачи (1)-(3).

Введем вспомогательную плоскость τ по формуле

$$\tau = \tau(z) = \exp\left\{\frac{2\pi i}{\tilde{\nu}}\chi(z)\right\}. \tag{2}$$

Тогда области G_z в плоскости τ соответствует кольцо G_τ, наружный радиус которого равен единице, а внутренний

$$|\tau|_\gamma = r = \exp\left\{\frac{-2\pi}{\tilde{\nu}}\right\}. \tag{3}$$

Сформулированная задача (1)-(3) будет, очевидно, решена, если будет найдена функция $z = z(\tau)$, обратная функция (2).

Можно показать, что

$$F(\tau) = \ln\frac{1}{\lambda}\frac{dz}{d\tau} = \ln\left|\frac{dz}{\lambda d\tau}\right| + i\arg\frac{dz}{\lambda d\tau}, \quad \tilde{\nu} = 2\pi r\lambda, \tag{4}$$

однозначная аналитическая функция в кольце G_τ. Тогда искомая функция выражается формулой

$$z(\tau) = \lambda\int_1^\tau \exp(F(t))dt + 1, \tag{5}$$

причем мы должны потребовать, чтобы отображение (5) было однолистным.

В терминах функции $F(\tau)$ условие 3) запишется в виде

$$Re\ F(\tau) = \ln\frac{1}{q(\rho, k, \nu)},\ |\tau| = r, \tag{6}$$

причем правая часть превращается в функцию от τ с помощью (5).

2. Как известно, явное выражение для оператора Шварца, восстанавливающего аналитическую однозначную функцию $F(\tau)$ по краевым условиям

$$ReF^{+}(e^{i\sigma}) = \mu(\sigma),\ ReF^{+}(re^{i\sigma}) = \mu_1(\sigma),\ -\pi \leq \sigma \leq \pi, \tag{7}$$

дается с помощью ζ- функция Вейерштрасса [5]. При этом необходимым и достаточным условием однозначности является равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mu_1(s)ds = \int_{-\pi}^{\pi} \mu(s)ds.$$

Предположим, что нам известна функция $F(\tau)$. Используя представление функции $z(\tau)$ в форме [5], вычислим граничные значения $z(\tau)$. При вычислении $z^{+}(e^{i\sigma})$ будем предполагать, что интегрирование ведется вдоль единичной окружности $\tau = e^{i\sigma}$, $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, тогда

$$z^{+}(e^{i\sigma}) = 1 + \lambda \int_{0}^{\sigma} \exp(F^{+}(e^{i\sigma}))de^{i\sigma}.$$

При вычислении $z^{+}(re^{i\sigma})$ вначале будем интегрировать по радиусу $\sigma = 0$, а затем вдоль окружности $\tau = re^{i\sigma}$, $-\pi \leq \sigma \leq \pi$:

$$z^{+}(re^{i\sigma}) = 1 + \lambda \int_{0}^{r} \exp(F(t))dt + \lambda r \int_{0}^{\sigma} \exp(F^{+}(re^{i\sigma}))de^{i\sigma}.$$

В силу условий задачи очевидно, что $|z^{+}(e^{i\sigma})| = 1$. Если свободную поверхность в плоскости z задать в параметрической форме $\rho = \rho(\sigma)$, $\varphi = \varphi(\sigma)$, то на окружности $\tau = re^{i\sigma}$ будем иметь $z^{+}(re^{i\sigma}) = \rho(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)}$. Пусть $\theta = \theta(\sigma)$ – угол наклона касательной к оси x в плоскости z. Тогда, как легко подсчитать,

$$\frac{\rho\prime(\sigma)}{\rho(\sigma)} = -\frac{\varphi\prime(\sigma)[-\cot\theta_1(\sigma)\sin\varphi(\sigma) + \cos\varphi(\sigma)]}{\sin\varphi(\sigma) + \cot\theta_1(\sigma)\cos\varphi(\sigma)}, \tag{8}$$

или

$$\rho(\sigma) = ce^{\int_0^\sigma P(\theta_1,\varphi,\varphi\prime)ds},\ \theta_1(\sigma) = \theta(\sigma) - \frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

где $c = \rho(0)$ и $P(\theta_1, \varphi, \varphi\prime)$ – функция, определяемая правой частью (8). Кривизна кривой γ есть $d\theta/ds$, s – длина дуги; после перехода к параметру σ можно записать

$$k = \frac{d\theta_1}{ds} = \frac{d\theta_1}{d\sigma}[\rho^2(\sigma)\varphi\prime^2(\sigma) + \rho\prime^2(\sigma)]^{-1/2}. \tag{10}$$

Таким образом, функция $q(\rho, k, \nu)$ превращается в функцию от τ, если учесть формулы (9), (10), т.е. правая часть формулы (6) есть некоторая известная функция от $\varphi(\sigma)$, $\varphi\prime(\sigma)$, $\theta(\sigma)$, $\theta\prime(\sigma)$ и числа c. Будем считать искомыми три функции – $\mu(\sigma)$,

$\varphi(\sigma)$, $\theta_1(\sigma)$ и два числа: λ и c. Равенства $|z^+(e^{i\sigma})| = 1$ и $z^+(re^{i\sigma})\rho(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)}$ совместно с условием однозначности функции $F(\tau)$ рассмотрим как уравнения для их определения.

Обозначим:

$$S_0\mu = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)\zeta(\sigma - s)ds,\ S\mu = \mu(\sigma) + S_0\mu(\sigma),$$

$$S_1\mu = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)\left[\zeta(\sigma - s + i\ln r) - i\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta(r)}{\pi}\ln r\right)\right]ds,\ \eta(r) = \zeta(\pi),$$

$$S_2\mu = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)\left[\zeta(\sigma - s - i\ln r) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta(r)}{\pi}\ln r\right)\right]ds,$$

$$K_1(\mu) = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)\zeta(-i\ln t - s)ds,$$

$$K_2\mu = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)\left[\zeta(-i\ln t - s + i\ln r) - i\left(\frac{1}{2} + \frac{\eta(r)}{\pi}\ln r\right)\right]ds, \tag{11}$$

где особый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Используя эти обозначения, выпишем систему уравнений для определения искомых величин:

$$A_0(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) \equiv \int_{-\pi}^{\pi}[\mu(s) + \ln q(\rho, k, \nu)]ds = 0,$$

$$A_1(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) \equiv \left|i\lambda\int_0^{\sigma}\exp[is + S\mu(s) + S_1\ln q(\rho, k, \nu)]ds + 1\right|^2 - 1 = 0,$$

$$A_2(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) \equiv -\left|1 + \lambda L + i\lambda r\int\limits_0^{\sigma}\exp[is + S_0\ln q(\rho, k, \nu) + S_2\mu(s)]q^{-1}(\rho, k, \nu)ds\right|^2$$

$$+\rho^2(\sigma) = 0,\ A_3(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) \equiv \varphi(\sigma) - Im\ln[1 + \lambda L + i\lambda r\int_0^{\sigma}q^{-1}(\rho, k, \nu)$$

$$\times\exp[is + S_0\ln q(\rho, k, \nu) + S_2\mu(s)]ds] = 0,\ A_4(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) \equiv c^2 - |1 + \lambda L|^2 = 0, \tag{12}$$

причем в функцию $q(\rho, k, \nu)$ нужно подставить выражение для $\rho(\sigma)$ и $k(\sigma)$ через функции $\varphi(\sigma)$, $\theta_1(\sigma)$, их производные и число c; через L обозначено:

$$L = \int_1^r\exp[K_1\mu(t) + K_2\ln q(\rho, k, \nu)]dt,$$

так что выражения (12) представляют собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций. Если решение системы

(12) найдено, то определится функция $F(\tau)$ и, следовательно, $z = z(\tau)$, тогда гармоническая функция

$$\psi(x, y) = -\frac{\tilde{\nu}}{2\pi} \ln |\tau(z)|, \ z = x + iy,$$

дает решение исходной задачи (1)-(3).

2. Пространства, операторы

1. Систему (12) запишем в виде

$$A_i(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{13}$$

Операторы A_i естественно рассматривать на множестве E элементов $y = (\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c)$. Каждый элемент y операторы A_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, преобразуют в элемент $z = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, при этом μ_0, μ_4 – вещественные числа, а $\mu_i(s)$, $i = 1, 2, 3,$ – вещественные функции, определнные на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Будем искать решения исходной задачи, симметричные относительно вещественной оси. В связи с этим положим, что $\theta_1(\sigma)$, $\varphi(\sigma) \in C^+_{1,\beta}[-\pi, \pi]$, а $\mu(\sigma) \in C^+_{0,\beta}$. Здесь $C_{l,\beta}$ обозначают пространства непрерывных функций, l-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \beta < 1$. Значок "+" или "$-$" означает, что рассматриваются соответственно подпространства четных или нечетных функций. Введем норму элемента y по формуле

$$\|y\|_E = |\lambda| + |c| + \|\mu\|_{C^+_{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^-_{1,\beta}} + \|\theta_1\|_{C^-_{1,\beta}},$$

тогда множество E превращается в полное линейное нормированное пространство.

Из сделанных предположений относительно свойств функций $\mu(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$, $\theta_1(\sigma)$ следует, что существуют и принадлежат классу $C_{0,\beta}$ функции $\mu_i(\sigma)$, $i = 1, 2, 3$.

Кроме того, используя нечетность функции Вейерштрасса, можно показать, что $\mu_1(-\sigma) = \mu_1(\sigma)$, $\mu_2(-\sigma) = \mu_2(\sigma)$, $\mu_3(-\sigma) = -\mu_3(\sigma)$. Таким образом, на множестве E_1 элементов $z = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ естественно ввести метрику следующим образом:

$$\|z\|_{E_1} = |\mu_0| + |\mu_4| + \|\mu_1\|_{C^+_{1,\beta}} + \|\mu_2\|_{C^+_{1,\beta}} + \|\mu_3\|_{C^-_{1,\beta}}.$$

Посредством функции $q(\rho, k, \nu)$ определенные выше операторы зависят также от параметров $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$. В дальнейшем будем предполагать, что $x = \nu \in \overset{(n)}{E}$, n-мерном евклидовоу пространству. Система операторов $A_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, задает некоторое отображение $F(x, y)$ произведения пространств $E \times \overset{(n)}{E}$ в пространство E_1.

Очевидно, что гладкость оператора $F(x, y)$ по переменным x и y будет определяться гладкостью функции $q(\rho, k, \nu)$ по своим аргументам, и так как мы предположили, что функция q имеет, по крайней мере, вторую непрерывную производную по своим аргументам, то легко показать, что существует сильный дифференциал отображения $F(x, y)$, совпадающий со слабым дифференциалом в некоторой окрестности тривиального решения, определенного ниже.

2. Для уравнения
$$F(x,y)=0 \tag{14}$$
легко указать решения (тривиальные), зависящие только от ρ, что соответствует тому, что функция $\psi(x,y) = \psi(\rho)$. При этом будем предполагать, что значения параметров, входящих в функцию q, фиксированы: $x_0 = \nu^0 = (\nu_1^0, \nu_2^0, ..., \nu_n^0)$. Гармоническая функция, зависящая лишь от ρ, в некотором кольце плоскости z имеет вид $\psi = a\ln\rho + b$. Используя условия 1) и 2) задачи, получим, что $\psi = \ln\rho/\ln\rho_0$, где ρ_0 – радиус внутренней окружности, играющей роль кривой γ. Последнее условие задачи дает уравнение для определения величины ρ_0
$$f(\rho_0) \equiv \rho_0 q(\rho_0, 1/\rho_0, \nu^0)\ln\rho_0 + 1 = 0. \tag{15}$$
В дальнейшем будем предполагать, что при выбранных значениях ν^0 уравнение (15) имеет корни. Замечая, что на тривиальном решении имеем $\tau = z$, легко получить тривиальное решение системы (14) $y_0 = (\lambda_0, \mu_0, \theta_{10}, \varphi_0, c_0) = (q_0, -\ln q_0, \sigma, \sigma, \rho_0)$, где $q_0 = q(\rho_0, 1/\rho_0, \nu^0)$. Мы покажем, что полученное таким образом тривиальное решение y_0 уравнения (14) можно непрерывно продолжить по параметрам $\nu = x$, так что функция $y = y(x)$ удовлетворяет тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ и, кроме того, $y(x_0) = y_0$, $x_0 = \nu^0$. Для этого воспользуемся теоремой о неявных функциях в функциональных пространствах. Использование этой теоремы позволяет в случае необходимости получать и некоторые приближенные решения, если только функция q обладает достаточной гладкостью по своим аргументам.

3. Для того чтобы показать применимость этой теоремы в нашем случае, нужно доказать, что при некоторых условиях линейный оператор $F'_y(x_0, y_0)$ имеет ограниченный обратный.

Пусть компоненты оператора $F'_y(x_0,y_0)$ есть $A'_{iy}(x_0,y_0)$, $i = 0,1,2,3,4$, и пусть $y = (\Delta\lambda, h, l, f, \Delta c)$, тогда
$$A'_{iy}(x_0,y_0) = \frac{d}{dt}A_i(\lambda_0 + t\Delta\lambda, \mu_0 + th, \theta_{10} + tl, \varphi_0 + tf, c_0 + t\Delta c, \nu^0)\big|_{t=0},$$
где y_0 – тривиальное решение, x_0 – фиксированное значение параметров для которых подсчитано ρ_0. Нам понадобятся еще функциональные производные от величин $\rho(\theta_1, \varphi, c)$ и $\ln q[\rho(\theta_1,\varphi,c),\ k(\theta_1,\varphi,c),\ \nu^0]$:
$$u(\sigma) = \frac{d}{dt}\rho(\theta_{10} + tl, \varphi_0 + tf, c_0 + t\Delta c)|_{t=0} = \Delta c + \rho_0\int_0^\sigma f(s)ds - \rho_0\int_0^\sigma l(s)ds,$$
$$T(\sigma) = \frac{d}{dt}\ln q[\rho(\theta_{10} + tl, \varphi_0 + tf, c_0 + t\Delta c), k(\theta_{10} + tl, \varphi_0 + tf, c_0 + t\Delta c), \nu^0]|_{t=0}$$
$$= \frac{\bar{q}_\rho u(\sigma) - \rho_0^{-2} q_{ku''}(\sigma)}{q_0},$$

причем под $\bar{q}_\rho$ понимается полная производная функции $q[\rho, \frac{d\theta_1}{d\sigma}(\rho^2\varphi'^2+\rho'^2)^{-1/2},\ \nu]$ по ρ.

Непосредственные вычисления показывают, что компоненты дифференциала Фреше отображения $F(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеют вид:

$$A'_{1y}(x_0,y_0)y \equiv 2Reie^{-i\sigma}\int_0^\sigma e^{is}[Sh(s)+S_1T(s)]ds + \frac{2}{q_0}(1-\cos\sigma)\Delta\lambda,$$

$$A'_{2y}(x_0,y_0)y \equiv 2\rho_0 u(\sigma) + \frac{2\rho_0\Delta\lambda}{q_0}\cos\sigma - \frac{2\rho_0^2\Delta\lambda}{q_0(1+\ln\rho_0)} - 2Re\rho_0 e^{-i\sigma}[q_0 L'(\mu,\theta_1,\varphi,c)$$

$$+i\rho_0\int_0^\sigma e^{is}[S_0T(s)+S_2h(s)-T(s)]ds],\ \ A'_{3y}(x_0,y_0)y \equiv f(\sigma) - Im\rho_0^{-1}e^{-i\sigma}[q_0L'(\mu,\theta_1,\varphi,c)$$

$$+i\rho_0\int_0^\sigma e^{is}[S_0T(s)+S_2h(s)-T(s)]ds] - \frac{\Delta\lambda}{\rho_0 q_0}\sin\sigma,\ \ A'_{4y}(x_0,y_0)y \equiv 2\rho_0\Delta c - 2\rho_0 q_0$$

$$\times L'(\mu,\theta_1,\varphi,c) + 2\rho_0\Delta\lambda q_0^{-1}[1-\rho_0(1+\ln\rho_0)^{-1}],\ \ A'_{0y}(x_0,y_0)y \equiv \int_{-\pi}^{\pi}[h(s)+T(s)]ds. \quad (16)$$

3. Линеаризованная система

1. Теперь исследуем вопрос о разрешимости линейной неоднородной системы

$$F'_y(x_0,y_0)y = z, \quad (17)$$

где компоненты оператора $F'_y(x_0,y_0)$ даются выражениями (16) и $z = (2\pi\mu_0, 2\tilde{\mu}_1(\sigma), -2\rho_0\tilde{\mu}_2(\sigma), \rho_0^{-1}\tilde{\mu}_3(\sigma), -2\rho_0\tilde{\mu}_4)$ – любой фиксированный элемент пространства E_1. Оказывается, что введением функции

$$\Phi_0(\tau) = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s)\zeta(-i\ln\tau - s)ds - \frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}\ln\tau + \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(s)[\zeta(-i\ln\tau - s + i\ln\rho_0)$$

$$-i(\eta(\rho_0)\pi^{-1}\ln\rho_0 + 1/2)]ds, \quad (18)$$

аналитической однозначной в кольце с наружным радиусом единица и внутренним ρ_0 в плоскости τ, систему (17) можно расщепить так, что после решения первых трех уравнений из двух последних находятся значения $f(\sigma)$ и Δc. С помощью же (18) первые три уравнения приводят к краевой задаче определения функции $\Phi_0(\tau)$ и числа $\Delta\lambda$:

$$Re\ i\int_0^\sigma (e^{i(s-\sigma)}\Phi_0^+ + e^{is})ds + \frac{\Delta\lambda}{q_0}(1-\cos\sigma) = \tilde{\mu}_1(\sigma) + \frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}(1-\cos\sigma);$$

$$-u(\sigma) + Re\int_1^{\rho_0 e^{i\sigma}} e^{-i\sigma}\Phi_0(\tau)d\tau - \frac{\Delta\lambda}{q_0}\cos\sigma + \frac{\rho_0\Delta\lambda}{q_0(1+\ln\rho_0)} = -\frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}(\rho_0\ln\rho_0$$

$$-\rho_0+\cos\sigma)+\tilde{\mu}_2(\sigma),\ \rho_0\neq e^{-1};\ \frac{\bar{q}_\rho u(\sigma)-q_0^{-2}q_k u''(\sigma)}{q_0}=-Re\Phi_0^+(\rho_0 e^{i\sigma})+\mu_0, \quad (19)$$

где $\Phi_0^+(e^{is})$, $\Phi_0^+(\rho_0 e^{is})$ – предельные значения $\Phi_0(\tau)$ на $|\tau|=1$, $|\tau|=\rho_0$. Функция $\Phi_0(\tau)$ ищется в виде ряда Лорана:

$$\Phi_0(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha_n+i\beta_n)\tau^n. \quad (20)$$

Из того факта, что функции $h(\sigma)$ и $T(\sigma)$ четные и $\Phi_0(\tau)$ можно представить в виде (18), следует, что $\beta_n=0$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$ Пусть

$$\mu_1(\sigma)=\tilde{\mu}_1(\sigma)+\frac{2\eta(\rho_0)}{\pi}\mu_0(1-\cos\sigma)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\sigma,$$

тогда первое уравнение (19) эквивалентно системе

$$-\alpha_{-1}+\alpha_0+\frac{\Delta\lambda}{q_0}=\frac{a_0}{2},\quad -\frac{\alpha_{-1}}{2}-\alpha_0-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{1+n}+\frac{\alpha_{-n}}{1-n}\right)-\frac{\Delta\lambda}{q_0}=a_1,$$

$$\frac{(-1)^n 2\alpha_{-1}}{1-n^2}+\frac{\alpha_n}{1+n}+\frac{\alpha_{-n}}{1-n}=a_n,\quad n=2,3,\ldots. \quad (21)$$

Из дифференциального уравнения, последнего соотношения в (19), найдем функцию $u(\sigma)$. Пусть, например, $\gamma^2=-\bar{q}_\rho/\rho_0^{-2}q_k$. Общее решение этого дифференциального уравнения $C_1\sin\gamma\sigma+C_2\cos\gamma\sigma$ содержит две произвольные постоянные. Полагаем $C_1=0$, так как ищутся только четные решения. Подставим решение $u(\sigma)$ во второе соотношение (19), при этом член $C_2\cos\gamma\sigma$ перенесем в правую часть, считая C_2 известным. Ниже мы покажем, что величина C_2 определяется по функциям $\tilde{\mu}_1(\sigma)$, $\tilde{\mu}_2(\sigma)$. Если

$$\mu_2(\sigma)=\tilde{\mu}_2(\sigma)-\frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}(\rho_0\ln\rho_0-\rho_0+\cos\sigma)+\frac{q_0}{q_\rho}\mu_0+C_2\cos\gamma\sigma=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\sigma,$$

то второе и третье уравнения из (19) эквивалентны системе

$$\frac{q_0}{q_\rho}\alpha_0-\alpha_{-1}+\alpha_0\rho_0+\frac{\rho_0\Delta\lambda}{q_0(1+\ln\rho_0)}=\frac{A_0}{2};\quad -\frac{q_0(\alpha_1\rho_0+\alpha_{-1}\rho_0^{-1})}{\rho_0^{-2}q_k(\gamma^2-1)}+\alpha_{-1}\ln\rho_0-\frac{\alpha_{-1}}{2}$$

$$+\frac{\alpha_1\rho_0^2}{2}-\sum_{n=-\infty,n\neq-1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{1+n}-\frac{\Delta\lambda}{q_0}=A_1;\ -\frac{q_0(\alpha_n\rho_0^n+\alpha_{-n}\rho_0^{-n})}{\rho_0^{-2}q_k(\gamma^2-n^2)}+\alpha_{-1}\frac{(-1)^n 2}{1-n^2}$$

$$+\frac{\alpha_n\rho_0^{1+n}}{1+n}+\frac{\alpha_{-n}\rho_0^{1-n}}{1-n}=A_n,\quad n=2,3,\ldots. \quad (22)$$

Здесь предполагается, что γ^2 не есть квадрат целого числа.

2. Заметим, что нас интересуют решения y системы (17), принадлежащие пространству E. В частности, функция $h(\sigma)$ должна быть четной гельдеровой функцией. Дифференцируя первое соотношение (19) по σ, получим

$$Re\ i\ \Phi_0^+(e^{i\sigma}) + Re\int_0^\sigma e^{i(s-\sigma)}\Phi_0^+(e^{is})ds + \frac{\Delta\lambda}{q_0}\sin\sigma = \mu_1'(\sigma). \tag{23}$$

Если функция $h(\sigma) = Re\ \Phi_0^+(e^{i\sigma})$ четная, а потому 2π-периодическая, то и Im $\Phi_0^+(e^{i\sigma})$ – 2π-периодическая функция. Но тогда из (23) получаем условие

$$\mu_1'(\pi) - \mu_1'(-\pi) = Re\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{is}\Phi_0^+(e^{is})ds = -2\pi\alpha_{-1}, \tag{24}$$

необходимое для разрешимости линейной задачи в классе 2π-периодических функций $h(\sigma)$. Оказывается, что это условие и достаточно для 2π-периодичности и гельдеровости функций $h(\sigma)$, $\Phi_0^+(e^{i\sigma})$, если только $\Phi_0^+(e^{i\sigma})$ принадлежит классу L_p с любым $p > 1$. Равенство (24) мы используем для нахождения коэффициента α_{-1}. Рассматривая совместно системы (21) и (22), получим выражения для коэффициентов α_n, $n = 1, \pm 2, \pm 3, ...$, если только отличны от нуля определители

$$\Delta_n = -\frac{q_0\rho_0^n}{\rho_0^{-2}q_k(\gamma^2-n^2)} - \frac{(n-1)q_0\rho_0^{-n}}{\rho_0^{-2}q_k(\gamma^2-n^2)(n+1)} + \frac{\rho_0^{1+n}}{1+n} - \frac{\rho_0^{1-n}}{1+n},\ n = 1, 2, ...$$

Коэффициент α_0 и число $\Delta\lambda$ находятся из системы

$$\alpha_0 + \frac{\Delta\lambda}{q_0} = \frac{a_0}{2} + \alpha_{-1},\ \left(\frac{q_0}{\bar{q}_\rho} + \rho_0\right)\alpha_0 + \frac{\rho_0\Delta\lambda}{q_0(1+\ln\rho_0)} = \frac{A_0}{2} + \alpha_{-1} \tag{25}$$

в предположении, что определитель

$$\Delta_0 = \frac{q_0}{\bar{q}_\rho} + \rho_0 - \frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0} \tag{26}$$

отличен от нуля.

3. Исследуя решения систем (21) и (22), можно показать, что при достаточно больших n

$$\alpha_n - \alpha_{-n} = na_n + \frac{2\alpha_{-1}(-1)^n}{n} + O(a_n) + O(n^{-2}),\ \alpha_n\rho_0^n - \alpha_{-n}\rho_0^{-n} = \frac{n}{\rho_0}A_n$$

$$+\frac{2\alpha_{-1}(-1)^n}{\rho_0 n} + O(A_n) + O(n^{-2}), \tag{27}$$

где

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\mu_1'(\sigma)\sin n\sigma d\sigma,\quad A_n = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\mu_2'(\sigma)\sin n\sigma d\sigma.$$

Аналогичное асимптотическое поведение имеют величины $\alpha_n+\alpha_{-n}$, $\alpha_n\rho_0^n+\alpha_{-n}\rho_0^{-n}$. Но из (27) следует, что функции $\Phi_0^+(e^{i\sigma})$ и $\Phi_0^+(\rho_0 e^{i\sigma})$ принадлежат классу L_p с любым $p>1$. Поскольку условие (24) выполнено по самому способу выбора числа α_{-1}, то $h(\sigma)=Re\ \Phi_0^+(e^{i\sigma})$ является 2π-периодической функцией и удовлетворяет условию Гельдера.

Дифференцируя второе соотношение (19), получим

$$-u'(\sigma)+Re\ [i\rho_0\Phi_0^+(\rho_0 e^{i\sigma})-ie^{-i\sigma}\int_1^{\rho_0 e^{i\sigma}}\Phi_0(\tau)d\tau]=\tilde{\mu}_2'(\sigma)+\frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}\sin\sigma. \quad (28)$$

Используя асимптотические оценки, легко убедиться, что $u'(\sigma)$ удовлетворяет условию Гельдера, но тогда из (28) следует гельдеровость $Im\ \Phi_0^+(\rho_0 e^{i\sigma})$. Рассуждая, как и выше, получим необходимые и достаточные условия 2π-периодичности и гельдеровости функции $\Phi_0^+(\rho_0 e^{i\sigma})$ в виде

$$-u'(\pi)+u'(-\pi)-2\pi\alpha_{-1}=\tilde{\mu}_2'(\pi)-\tilde{\mu}_2'(-\pi). \quad (29)$$

Так как

$$-u'(\pi)+u'(-\pi)=2C_2\gamma\sin\gamma\pi,$$

причем γ не равно целому числу, то условие (29) перепишется как

$$2C_2\gamma\sin\gamma\pi-2\pi\alpha_{-1}=\tilde{\mu}_2'(\pi)-\tilde{\mu}_2'(-\pi). \quad (30)$$

Условие (30) удовлетворим выбором числа C_2, после чего определится функция $\mu_2(\sigma)$.

Следовательно, решая уравнения (19), можно однозначно определить функции $h(\sigma)\in C_{0,\alpha}$, $u(\sigma)\in C_{2,\alpha}$, $\Phi_0(\tau)\in H_\alpha$ и число $\Delta\lambda$, если только выполняются все ранее приведенные условия. Обращаясь к двум последним уравнениям системы (17), найдем из них функцию $f(\sigma)\in C_{1,\alpha}$ и число Δc.

Аналогичные исследования можно провести и в случае $\gamma=0$, γ^2 есть квадрат целого числа, а также при $\rho_0=e^{-1}$.

Собирая все сделанные ранее предположения, сформулируем полученные в этом параграфе результаты в виде леммы.

Лемма. Предположим, что заданная функция $q(\rho,k,\nu)$ дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам и положительна, причем уравнение (15) имеет корень $0<\rho_0<1$, $\rho_0\neq e^{-1}$. Пусть на указанном корне $q_k(\rho_0,1/\rho_0,\nu^0)$, $\bar{q}_\rho(\rho_0,1/\rho_0,\nu^0)$ отличны от нуля, а величина $\gamma^2=-\bar{q}_\rho(\rho_0,1/\rho_0,\nu^0)/\rho_0^{-2}q_k(\rho_0,1/\rho_0,\nu^0)$ не есть квадрат целого числа и пусть, кроме того, выполняются условия

$$\Delta_0\neq 0,\Delta_n\neq 0,\quad n=1,2,..., \quad (31)$$

тогда система (17), где правая часть есть заданный элемент пространства E_1, однозначно разрешима, причем решение $y = (\Delta\lambda, h(\sigma), l(\sigma), f(\sigma), \Delta c)$ есть элемент пространства E. Соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение. В случае $\rho_0 = e^{-1}$ или $\bar{q}_\rho(\rho_0, 1/\rho_0, \nu^0) = 0$ достаточно выполнения только второго из условий (31). Если же γ^2- квадрат целого числа, соответствующее условие из (31) при $n = \gamma$ заменяется условием вида

$$\rho_0^\gamma + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\rho_0^{-\gamma} \neq 0,$$

которое имеет место для всех $0 < \rho_0 < 1$.

4. Теорема о продолжении решений. Капиллярно-гравитационные волны

1. В условиях сформулированной выше леммы можно утверждать, что отображение $F(x, y)$ пространства $E \times \overset{(n)}{E}$ в E_1 обладает всеми свойствами, достаточными для применения теоремы о неявных функциях в функциональных пространствах. Это означает, что для системы операторов

$$A_i(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

единственным образом определяются функции

$$\lambda = \lambda(\nu), \ \mu = \mu(s, \nu), \ \theta_1 = \theta_1(s, \nu), \varphi = \varphi(s, \nu), \ c = c(\nu), \tag{32}$$

удовлетворяющие условиям

$$\lambda_0 = \lambda(\nu^0), \ \mu(s, \nu^0) = -\ln q(\rho_0, 1/\rho_0, \nu^0), \ \theta_1(s, \nu^0) = s, \ \varphi(s, \nu^0) = s, \ c(\nu^0) = \rho^0,$$

$$A_i(\lambda(\nu), \mu(s, \nu), \theta_1(s, \nu), \varphi(s, \nu), c(\nu), \nu) = 0$$

на сегменте $[-\pi, \pi]$ по s и в некоторой окрестности точки ν^0 по параметрам $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$. Функции (32) имеют по крайней мере первые непрерывные производные по всем параметрам $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$.

Чтобы доказать, что исходная задача (1)-(3) имеет решение, нужно еще убедиться в том, что функция

$$z(\tau, \nu) = \lambda(\nu) \int_1^\tau \exp\{F(t, \nu)\} dt + 1 \tag{33}$$

дает однолистное отображение плоскости τ на плоскость z, где функция $F(t, \nu)$ строится по найденным граничным значениям:

$$Re\ F(t, \nu) = \mu(s, \nu) \qquad \text{при} \qquad |\tau| = 1,$$
$$Re\ F(t, \nu) = -\ln q[\rho(s, \nu), k(s, \nu), \nu] \qquad \text{при} \qquad |\tau| = r(\nu).$$

Производная функции (33) равна $\lambda(\nu)\exp\{F(t,\nu)\}$ и отлична от нуля в замкнутом кольце в некоторой окрестности точки ν^0. Таким образом, отображение (33) локально однолистно. Кроме того, можно показать, что оно однозначно. По способу построения функции $z(\tau,\nu)$ имеем $|z^+(e^{i\sigma},\nu)| = 1$, т.е. $z^+(e^{i\sigma},\nu) = \exp\{i\alpha(\sigma,\nu)\}$. Найдя функцию $\alpha(\sigma,\nu)$ из (33), получим $\alpha(-\pi,\nu) = -\pi$, $\alpha(\pi,\nu) = \pi$ и $|\partial\alpha(\sigma,\nu)/\partial\sigma| > 0$, так что окружность $|\tau| = 1$ взаимно однозначно отображается на окружность $|z| = 1$. Из свойств функции $F(t,\nu)$ следует, что $\arg z^+(re^{i\pi}) = -\arg z^+(re^{-i\pi}) = \pi$, и поскольку на тривиальном решении $\partial\varphi(\sigma,\nu^0)/\partial\sigma = 1$, то и в некоторой окрестности точки ν^0 имеем $\partial\varphi(\sigma,\nu)/\partial\sigma > 0$. Отсюда следует взаимная однозначность отображения окружности $|\tau| = r(\nu)$ на некоторую замкнутую кривую в плоскости z. Из локальной однолистности и взаимно одназначного соответствия границ следует глобальная однолистность отображения (33). Таким образом, доказана

Теорема 1. В условиях леммы сформулированная в первом параграфе задача (1)-(3) имеет n-параметрическое семейство решений.

2. Рассмотрим капиллярно-гравитационные волны в плоском канале постоянной конечной глубины. Пусть течение рассматривается в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Закон Бернулли на свободной поверхности с учетом поверхностного натяжения имеет вид

$$|grad\ \psi|^2 = \frac{C_0 - 2g\eta + 2\alpha k}{C_1^2}, \tag{34}$$

где C_0 – постоянная Бернулли, g – гравитационная постоянная, α – коэффициент поверхностного натяжения, k – кривизна свободной поверхности, C_1 – расход. С помощью отображения $z = \exp\{2i\pi\zeta/l\}$ область, занятая одной волной длины l в плоскости течения, отображается в область G_z рассматриваемого вида. В силу конформной инвариантности задачи о капиллярногравитационных волнах после такого преобразования приходим к задаче 1)-3), причем условие 3) имеет вид

$$|grad\ \psi| = \frac{l}{2\pi\rho C_1}[C_0 + gl\pi^{-1}\ln\rho + \tfrac{4\pi\alpha\rho}{l}\tfrac{d\theta_1}{d\sigma}(\rho^2\varphi'^2 + \rho'^2)^{-1/2} + \tfrac{4\pi\alpha\rho}{l}\tfrac{\varphi'(3\rho'^2 - \rho^2\varphi'^2)}{(\rho^2\varphi'^2 + \rho'^2)^{3/2}}]^{1/2}. \tag{35}$$

Входящие в формулу (35) постоянные C_0, C_1, l будем рассматривать, как некоторые числовые параметры $\nu_1 = C_0$, $\nu_2 = l$, $\nu_3 = C_1$, величины g, α- заданные физические константы.

Уравнение (15) в этом случае запишется в виде

$$\frac{l}{2\pi C_1}\left(C_0 + \frac{gl}{2\pi}\ln\rho_0\right)\ln\rho_0 + 1 = 0. \tag{36}$$

Пусть для некоторых $\nu_1 = \nu_1^0$, $\nu_2 = \nu_2^0$, $\nu_3 = \nu_3^0$ уравнение (36) имеет корень ρ_0. Заметим, что вид функции (35) несколько отличается от того, что мы требовали в постановке задачи 1)-3), однако непосредственными вычислениями легко показать, что функциональная производная функции (35) имеет точно такой же вид, как и $T(\sigma)$. При этом

$$q_0 = \frac{l^0}{2\pi\rho_0 C_1^0}\left(C_0^0 + \frac{gl^0 \ln\rho_0}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \bar{q}_\rho = \frac{l^0}{2\pi\rho_0^2 C_1^0}\frac{\frac{gl^0}{2\pi} - C_0^0 - \frac{gl^0\ln\rho_0}{\pi}}{\left(C_0^0 + \frac{gl^0\ln\rho_0}{\pi}\right)^{1/2}},$$

$$-\rho_0^2 q_k = -\frac{\alpha}{C_1^0\rho_0^2}\left(C_0^0 + \frac{gl^0\ln\rho_0}{\pi}\right)^{-1/2}. \qquad (37)$$

Используя величины (37), легко получить, что условия (31) леммы нарушаются при выполнении одного из равенств

$$V^2 = gh,\ V_n^2 = \left(2\pi n\frac{\alpha}{l^0} + \frac{gl^0}{2n\pi}\right)\tanh\frac{2\pi h}{l^0}n, \quad n = 1, 2, ..., \qquad (38)$$

где V- скорость невозмущенного потока, h- глубина, так что $C_1^0 = Vh$. Указанные значения скоростей, соответствующие спектру линейной задачи, являются в некотором смысле критическими, что будет выяснено в следующем параграфе. Применяя теорему 1 в данном случае, получим.

Следствие. В условиях леммы задача о капиллярно-гравитационных волнах имеет трехпараметрическое семейство решений.

Замечание. Можно показать, что решения, существование которых утверждает теорема 1, геометрически тривиальны, поскольку функция $\rho = \rho(\sigma, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, описывающая свободную поверхность, не зависит фактически от параметра σ. Это утверждение следует из единственности решения, получаемого с помощью теоремы о неявных функциях в функциональных пространствах, и гладкости функции q относительно своих аргументов. Таким образом, геометрически нетривиальные решения исходной задачи, близкие к тривиальному при малых отклонениях параметров ν от начальных значений, могут получаться только при "спектральных" значениях начальных параметров, т.е. когда нарушаются некоторые из условий (31).

5. Теоремы о ветвлении решений

1. Выше было показано, что если выполняются условия (31) леммы, то уравнение $F(x,y) = 0$ имеет решение $y = y(x)$, которое является продолжением тривиального решения y_0, так что $y(x_0) = y_0$. Теперь мы остановимся на случае, когда нарушается первое из условия (31), а остальные имеют место, и рассмотрим возможность продолжения тривиального решения по параметрам.

Пусть

$$\frac{q^0}{\bar{q}_\rho} + \rho_0 - \frac{\rho_0}{1 + \ln\rho_0} = 0, \quad \rho_0 \neq e^{-1},\ \Delta_n \neq 0,\ n = 1, 2, ..., \qquad (39)$$

причем величина ρ_0 находится из (15) при некоторых фиксированных значениях параметров ν^0. Тогда линейная однородная система (17) имеет нетривиальное решение. Поскольку в этом случае, как это следует из (25),

$$\Phi_0(\tau) = -\frac{\Delta\lambda}{q_0},$$

то

$$h(\sigma) = -\frac{\Delta\lambda}{q_0},\ u(\sigma) = \frac{\Delta\lambda}{\bar{q}_\rho},\ f(\sigma) = 0,\ l(\sigma) = 0,\ \Delta c = \frac{\Delta\lambda}{\bar{q}_\rho} \tag{40}$$

и величина $\Delta\lambda$ может быть выбрана произвольно. Таким образом, существует одномерное пространство решений однородного уравнения (17); в качестве базиса этого пространства может быть выбран вектор

$$\varphi = (\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c) = (1, -1/q_0, 0, 0, 1/\bar{q}_\rho). \tag{41}$$

Обращаясь снова к (25), легко видеть, что неоднородная система (17) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{a_0\rho_0}{2(1+\ln\rho_0)} - \frac{A_0}{2} + \alpha_{-1}\left(\frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0} - 1\right) = 0. \tag{42}$$

Исходя из определения величин a_0, A_0, α_{-1}, условие (42) можно переписать в терминах правой части уравнения (17):

$$-\frac{\rho_0}{1+\ln\rho_0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\mu}_1(\sigma)d\sigma + \frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\mu}_2(\sigma)d\sigma - \frac{2\eta(\rho_0)\mu_0}{\pi}(\rho_0\ln\rho_0 - \rho_0)$$

$$+\mu_0\frac{q_0}{\bar{q}_0} + \frac{\tilde{\mu}_2'(\pi) - \tilde{\mu}_2'(-\pi)}{2\pi\gamma^2} - \frac{\tilde{\mu}_1'(\pi) - \tilde{\mu}_1'(-\pi)}{2\pi\gamma^2} + \frac{\tilde{\mu}_1'(\pi) - \tilde{\mu}_1'(-\pi)}{2\pi}(\rho^0[1+\ln\rho_0]^{-1} - 1) = 0.$$

Обозначим через $\langle p, q\rangle$ значение линейного ограниченного функционала $q \in S^*$ на векторе $p \in S$ (S- банахово пространство и S^*- пространство, сопряженное с S), тогда условие (42) можно записать в виде

$$\langle z, \psi\rangle = 0, \tag{43}$$

$\psi \in E_1^*$, $z \in E_1$, причем ψ определено левой частью написанного выше равенства.

Таким образом, в рассматриваемом случае оператор $F_y'(x_0, y_0)$ нормально разрешим в смысле Хаусдорфа, причем подпространство нулей $E^{(1)} \in E$ оператора $F_y'(x_0, y_0)$ и подпространство нулей сопряженного с ним оператора $E_{(1)} \in E$ имеют размерности $n = 1$ и $m = 1$ соответственно.

Далее будем предполагать аналитичность функции $q(\rho, k, \nu)$ по всем аргументам. Нетрудно убедиться, что тогда оператор $F(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Значения параметров x, при которых выполняется условие (39), естественно называть спектральными значениями. Вопрос о продолжении тривиального решения уравнения (14) по параметрам в случае спектральных значений сводится к построению и исследованию так называемого уравнения разветвления (см. [5], §3).

2. Положим $x - x_0 = h$, $y - y_0 = g$. Уравнению (14) можно придать вид

$$Bg = L(h, g),$$

где $B = -F'_y(x_0, y_0)$ и $L(h, g) = O(\|h\|) + O(\|h\| + \|g\|)$. По теореме Хана-Банаха в пространстве E^* существует вектор γ, такой что $\langle \varphi, \gamma \rangle = 1$, где φ- вектор из (41), и элемент $z \in E_1$, такой, что $\langle z, \psi \rangle = 1$, где $\psi \in E_1^*$- построенный выше функционал. Линейный оператор $Q = \langle \cdot, \gamma \rangle \, \varphi$ является оператором проектирования из E в $E^{(1)}$ и приводит к разложению пространства E в прямую сумму $E = E^{(1)} + E_{1,(\infty-1)}$. Аналогично оператор $P =< \cdot, \psi > z$ является оператором проектирования из E_1 в $E_{(1)}$ и приводит к разложению пространства E_1 в прямую сумму $E_1 = E_{(1)} + E_{1,(\infty-1)}$. Оператор $\tilde{B}$ из $E^{(\infty-1)}$ в $E^{(\infty-1)}$, совпадающий с B на $E^{(\infty-1)}$, отображает взаимно однозначно $E^{(\infty-1)}$ на $E_{1,(\infty-1)}$, что является следствием нормальной разрешимости оператора $F'_y(x_0, y_0)$, и потому по теореме Банаха имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{B}^{-1}$.

По лемме Шмидта при $n = m = 1$ оператор

$$\hat{B} = B - \langle \cdot, \gamma \rangle z$$

имеет ограниченный обратный

$$\hat{B}^{-1} = \tilde{B}^{-1} - \langle \cdot, \psi \rangle \tilde{B}^{-1} z - \langle \cdot, \psi \rangle \varphi. \tag{44}$$

Пусть $g = g(h, \xi)$- решение уравнения

$$\hat{B}g = L(h, g) - \xi z, \quad \xi = \langle g, \gamma \rangle,$$

причем ξ рассматривается как параметр. Подставляя найденное решение в выражение для ξ, получим

$$\xi = \langle g(h, \xi), \gamma \rangle$$

– уравнение разветвления Ляпунова-Шмидта. Отсюда следует, что уравнение (14) имеет столько же решений, сколько решений $\xi = \xi(h)$, таких, что $\xi(h) \to 0$ при $h \to 0$, имеет уравнение разветвления. Пусть $h = \zeta h_1$, где h_1- произвольный ненулевой вектор из пространства $\overset{(n)}{E}$. Уравнение разветвления в случае аналитичности оператора $F(x, y)$ можно записать еще в виде

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0} \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{l=1}^{\infty} L_{kl} \zeta^l = 0, \tag{45}$$

где L_{kl}- некоторые функционалы на векторе h_1:

$$L_{01} = \langle F_{01} h_1, \psi \rangle, \; L_{02} = \langle F_{02} h_1^2 + 2F_{11}(\Gamma F_{01} h_1) h_1 + F_{20}(\Gamma F_{01} h_1)^2, \psi \rangle,$$

$$L_{11} = 2\langle F_{11}\varphi + F_{20}(\varphi\Gamma F_{01})h_1, \psi\rangle, L_{20} = \langle F_{20}\varphi^2, \psi\rangle, ..., F_{rs} = \frac{1}{(r+s)!}\frac{\partial F^{r+s}(x_0, y_0)}{\partial x^s \partial y^r}, \tag{46}$$

через Γ обозначен оператор $\hat{B}^{-1}$.

3. Предположим, что уравнение (45) имеет действительное решение $\xi = \xi(\zeta)$, разлагающееся в ряд по целым степеням ζ и стремящееся к нулю вместе с $\zeta \to 0$. Тогда уравнение (14) имеет решение $y = y(\zeta)$, причем $y(\zeta) \to y_0$ при $\zeta \to 0$. Беря полную производную от тождества $F(x(\zeta), y(\zeta)) \equiv 0$ по ζ и полагая затем $\zeta = 0$, получим $By'_\zeta = F_{01}h_1$. Поскольку это уравнение имеет решение (относительно y'_ζ), необходимо, чтобы выполнялось условие

$$L_{01} = \langle F_{01}h_1, \psi\rangle = 0. \tag{47}$$

Пусть $h_1 = (h_{11}, h_{12}, ..., h_{1n})$ и $m_{01} = \sum_{i=1}^n q_{\nu_i}(\rho_0, \rho^{-1}, \nu^0)h_{1i}/q_0$. Как показывают вычисления, получим

$$\langle F_{01}h_1, \psi\rangle = -m_{01}(\rho_0 - q_0\bar{q}_\rho^{-1} + 2\eta(\rho_0)\pi^{-1}\rho_0 \ln \rho_0). \tag{48}$$

Если выражение в скобках равно нулю, то (47) выполняется при любом векторе h_1. Однако из

$$\rho_0 - q_0\bar{q}_\rho^{-1} + 2\eta(\rho_0)\pi^{-1}\rho_0 \ln \rho_0 = 0$$

и равенства (39) следует, что ρ_0 должно удовлетворять уравнению

$$T(\rho_0) \equiv 2\eta(\rho_0) + \pi(1 + 2\ln\rho_0)(\ln\rho_0[1 + \ln\rho_0])^{-1} = 0,$$

$$\eta(\rho_0) = \frac{\pi}{12}\left[1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_0^{2n}}{(1-\rho_0^{2n})^2}\right]. \tag{49}$$

Уравнение (49) можно рассматривать как дополнительное условие, которое вместе с (39) и (15) выделяют из пространства параметров ν ту область начальных значений, начиная из которой можно получить продолжение тривиального решения в спектральном случае. Исследование уравнения (49) показывает, что оно имеет два действительных корня $\rho_0^{(1)}$ и $\rho_0^{(2)}$.

Обозначим

$$S = \frac{q_0\bar{q}_{\rho\rho} - \bar{q}_\rho^2}{\bar{q}_\rho^2}. \tag{50}$$

Вычисляя значение первого коэффициента уравнения разветвления, получим

$$L_{20} = \frac{1}{2}[-5\rho_0 q_0^{-2}(1+\ln\rho_0)^{-1} + 2(\rho_0 + \rho_0^{-1})q_0^{-2} - \rho_0^{-1}\bar{q}_\rho^{-2} + \rho_0 q_0^{-2}(1+\ln\rho_0)^{-2}(1 - \ln^2\rho_0$$

$$\times(1+\ln\rho_0)^{-1})] - S\rho_0\ln\rho_0(2q_0^2\pi)^{-1}T(\rho_0), \tag{51}$$

причем последнее слагаемое равно нулю, если выполняется (49). Пусть ρ_0 обозначает один из корней (49). Поскольку из (39) можно найти $q_0\bar{q}_\rho^{-1}$ на этих значениях, а q_0- из (15), то определится величина $\bar{q}_\rho$, так что независимо от вида функции $q(\rho,k,\nu)$ можно вычислить левую часть (51). Оказывается, что значение этого функционала отлично от нуля на обоих корнях. Но это означает, что уравнение разветвления в некоторой окрестности точки $\xi=0$, $\zeta=0$ имеет два корня относительно ξ, стремящихся к нулю при $\zeta\to 0$. Однако, так как нас интересуют только вещественные решения $\xi=\xi(\zeta)$, то для выяснения этого вопроса необходимо найти следующие коэффициенты уравнения разветвления. Опуская громоздкие вычисления, запишем, что

$$L_{11}=m_{01}f_1(\rho_0,\gamma),\quad L_{02}=m_{01}^2f_2(\rho_0,\gamma),\quad Ł_{20}=f_3(\rho_0),$$

где $f_1(\rho_0,\gamma)$, $f_2(\rho_0,\gamma)$- некоторые функции γ, если под ρ_0 понимается $\rho_0^{(1)}$ или $\rho_0^{(2)}$. Уравнение разветвления перепишем в виде

$$f_3(\rho_0)\xi^2+m_{01}f_1(\rho_0,\gamma)\xi\zeta+m_{01}^2f_2(\rho_0,\gamma)\zeta^2+...=0,$$

где многоточие заменяет члены высших порядков. Дискриминант этого трехчлена

$$m_{01}^2(f_1^2(\rho_0,\gamma)-4f_2(\rho_0,\gamma)f_3(\rho_0))$$

положителен как для ρ_0^1, так и для ρ_0^2 при достаточно малых значениях γ. Отсюда следует, что уравнение разветвления в этом случае имеет два различных действительных решения $\xi=\xi(\zeta)$, таких, что $\xi\to 0$ при $\zeta\to 0$. Из сказанного вытекает

Теорема 2. Пусть $\rho=\rho_0$ вместе с начальными значениями параметров $\nu^0=(\nu_1^0,\nu_2^0,...,\nu_n^0)$ удовлетворяют уравнениям (15), (39), (47), а функция $q(\rho,k,\nu)$ положительна и аналитическая по своим аргументам. Если $0<\sum_{i=1}^n q_{\nu_i}^2(\rho_0,\rho_0^{-1},\nu^0)$, то система $A_i(\lambda,\mu,\theta_1,\varphi,c,\nu)=0$, $i=0,1,2,3,4$, имеет два действительных различных n- параметрических семейства решений $\overset{(k)}{y}=(\overset{(k)}{\lambda},\overset{(k)}{\mu},\overset{(k)}{\theta}_1,\overset{(k)}{\varphi},\overset{(k)}{c})$, $k=1,2$; эти решения определены в некоторой окрестности точки ν^0 при достаточно малых γ, вне плоскости $m_{01}=0$ и при $\nu\to\nu^0$ стремятся к тривиальному решению.

4. Обратимся к случаю, когда равенство (47) удовлетворяется за счет $m_{01}=0$. В этом случае получим следующие значения коэффициентов разветвления:

$$L_{02}=-\frac{V_0\rho_0\ln\rho_0}{2\pi}T(\rho_0),\quad V_0=\sum_{i,j=1}^n\frac{q_{\nu_i\nu_j}}{q_0}h_{1i}h_{1j},L_{11}=-\frac{t_{01}\rho_0\ln\rho_0}{\bar{q}_\rho\pi}T(\rho_0),$$

$$t_{01}=\sum_{i=1}\frac{\bar{q}_{\rho_{\nu_i}}}{q_0}h_{1i},\ L_{20}=f_3(\rho_0)-\frac{S\rho_0\ln\rho_0}{2q_0^2\pi}T(\rho_0).$$

Пусть L_{20}, L_{11}, L_{02} при некоторых значениях ρ_0, ν^0 отличны от нуля. Как и выше, наличие действительных корней уравнения разветвления связано со знаком дискриминанта

$$\Delta=L_{11}^2-4L_{02}L_{20}=\frac{\rho_0^2\ln^2\rho_0}{\pi^2}T^2(\rho_0)[-SV_0q_0^{-2}+t_{01}^2\bar{q}_\rho^{-2}]+V_0\pi^{-1}\rho_0\ln\rho_0T(\rho_0)f_3(\rho_0).$$

Теорема 3. Пусть при некоторых значениях ρ_0 и ν^0 удовлетворяются уравнения (15) и (39) и функция $q(\rho, k, \nu)$ положительна и аналитическая по своим аргументам. Если $m_{01} = 0$ и $\Delta > 0$, то система $A_i(\lambda, \mu, \theta_1, \varphi, c, \nu) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, имеет два действительных различных $(n-1)$- параметрических семейства решений. Эти решения определены в некоторой окрестности точки ν^0 в плоскости $m_{01} = 0$ и стремятся к тривиальному при $\nu \to \nu^0$.

Отметим, что коэффициенты L_{11}, L_{02} являются функционалами над вектором h_1, поэтому условие $\Delta > 0$ накладывает дальнейшие ограничения на область существования решений как функций от параметров.

В связи с теоремой 3 рассмотрим пример капиллярно-гравитационных волн. Исходя из вида функции (35), получим

$$\frac{q_0\bar{q}_{\rho\rho} - \bar{q}_\rho^2}{q_0^2} = \frac{1}{\rho_0^2}[1 - l^0(2\pi h)^{-1} - (l^0)^2(2\pi^2 h^2)^{-1}],\ t_{01} = l^0(h\pi\rho_0)^{-1}[3l^1(2l^0)^{-1} - C_1^1/C_1^0],$$

$$V_0 = -3\left(\tfrac{l^1}{l^0} - \tfrac{C_1^1}{C_1^0}\right)\left(\tfrac{l^1}{l^0} - \tfrac{C_1^1}{3C_1^0}\right),\ m_{01} = -\tfrac{C_1^1}{C_1^0} + -\tfrac{C_0^1}{2gh},\ \frac{l^0}{h} = -\frac{2\pi}{\ln\rho_0},\ C_1^0 = gh^3, \qquad (52)$$

где введены обозначения: $\nu^0 = (l^0, C_0^0, C_1^0)$, $h_1 = (l^1, C_0^1, C_1^1)$. Глубину невозмущенного потока естественно считать заданной величиной. Из (52) следует, что величина S становится отрицательной, начиная с некоторого l^0/h. Пусть D- часть плоскости параметров l^1, C_1^1, в которой $V_0 > 0$, $t_{01} \neq 0$. Исходя из свойств функции $T(\rho_0)$, нетрудно показать, что при $\rho_0 \to 1$ знак дискриминанта Δ будет определяться знаком выражения

$$\frac{t_{01}^2}{\bar{q}_\rho^2} - \frac{SV_0}{q_0^2}.$$

Отсюда и из теоремы 3 получаем

Следствие. Существуют два различных действительных двухпараметрических семейства решений задачи о плоских капиллярно-гравитационных волнах, если только величина l^0/h достаточно велика. Эти решения определены в области D и стремятся к тривиальному при $l^1 \to 0$, $C_1^1 \to 0$.

Это означает, что при скорости течения, близкой к критической, $\sqrt{gh}$, существует сколь угодно большой длины капиллярно-гравитационные волны. Аналогичное утверждение для гравитационных волн было доказано У. Литтменом [7].

Список литературы

[1] Beurling A. Sem. Analyt. Func., Prinecton, **1**(1958) 248–263.

[2] Данилюк И.И. ДАН СССР, **162**, 5 (1965) 979–983.

[3] Секерж-Зенькович Я.И. Труды Международного симпозиума по приложениям функций в механике сплошной среды **2** (1965) 362–381.

[4] Beckert H. Arch. Rational Mech. and Analysis, **13**, 1 (1963) 15–45.

[5] Коппенфельс В., Штальман С. Практика конформных отображений, ИЛ, М., (1963).

[6] Вайнберг М.М., Треногин В.А. УМН, **17**, 2 (1962) 13–75.

[7] Литтмен У. Теория поверхностных волн, Сборник переводов, ИЛ, М., 1959.

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

*Укр. мат. журнал–1973,–**25** №3*

1. Пусть Γ– единичная окружность на плоскости $z = x + iy$. Требуется определить двухсвязную область $G_z(t)$, изменяющуюся во времени, ограниченную кривой Γ и некоторой неизвестной простой замкнутой кривой $\gamma(t)$, так, чтобы выполнялись условия:

1) внутри $G_z(t)$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x, y, t)$, удовлетворяющая уравнению $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, и непрерывная вплоть до границы вместе со своими производными;

2) на Γ выполняется условия обтекания: $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$;

3) на неизвестной границе $\gamma(t)$ имеет место интеграл Коши:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - q(x, y, t) = 0,$$

где $q(x, y, t)$– заданная аналитическая функция своих аргументов;

4) пусть $F(x, y, t)$ определяет искомую линию $\gamma(t)$. Тогда должно выполняться условие

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

так называемое кинематическое условие на свободной границе;

5) в начальный момент времени $t = 0$ заданы значения потенциала $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$ и кривая $\gamma(0) = \gamma_0$.

Как известно, в каждый момент времени кольцо $G_z(t)$ можно конформно отобразить на круговое кольцо в некоторой плоскости τ, и это отображение определено единственным образом, если задать, например,соответствие точек $z = 1$ и $\tau = 1$. Таким образом, возникает отображающая функция $\tau(z, t)$. Пусть $z(\tau, t)$- обратная к ней функция, которая отображает круговое кольцо $G_{\rho(t)}$, $\rho(t) \le |\tau| \le 1$, на область $G_z(t)$. Функция $\rho(t)$– конформный радиус области $G_z(t)$ – должна находиться в процессе решения задачи.

Пусть начальная кривая γ_0 такова, что начало координат в плоскости z расположено вне области $G_z(0)$. Будем искать функцию $z(\tau, t)$ в виде $z(\tau, t) = \tau e^{F(\tau,t)}$, где $F(\tau, t)$– однозначная аналитическая по τ при каждом t функция с той же областью определения, что и у функции $z(\tau, t)$.

Вместе с потенциалом $\varphi(x, y, t)$ рассмотрим гармонически сопряженную ему функцию тока $\psi(x, y, t)$ и построим аналитическую функцию $\chi(z, t) = \varphi + i\psi$, вообще говоря, неоднозначную. Под $X(\tau, t)$ будем понимать результат суперпозиции $X(z(\tau, t), t)$. В терминах аналитических функций $F(\tau, t)$ и $X(\tau, t)$ исходную задачу можно переформулировать следующим образом.

Внутри кольца $G_{\rho(t)}$ требуется определить аналитические функции $F(\tau, t)$ и $X(\tau, t)$ и вещественную функцию $\rho(t)$ по следующим условиям:

$$Re\overline{\left(-1 + i\frac{\partial F^+}{\partial \sigma}\right)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^+ = -\rho^{-2} e^{-2ReF^+} Im\frac{\partial X^+}{\partial \sigma} + \frac{\rho\prime}{\rho}\left|-1 + i\frac{\partial F^+}{\partial \sigma}\right|^2 \text{ на } |\tau| = \rho(t), \tag{1}$$

$$Re\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^+ - Re\frac{\partial X^+}{\partial \sigma}\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^+}{i + \frac{\partial F^+}{\partial \sigma}} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial X^+}{\partial \sigma}\right|^2 \frac{\rho^{-2}e^{-2ReF^+}}{\left|i + \frac{\partial F^+}{\partial \sigma}\right|^2}$$

$$-q(Re\ \rho\ e^{i\sigma + F^+}, Im\ Re\ \rho\ e^{i\sigma + F^+}, t) \text{ на } |\tau| = \rho(t), \tag{2}$$

$$Re\ F^+ = 0, \quad F(1, t) = 0 \text{ на } |\tau| = 1, \tag{3}$$

$$Im\ X^+ = 0 \text{ на } |\tau| = 1, \tag{4}$$

где F^+, например, означает предельное значение функции $F(\tau, t)$ на границе области $G_{\rho(t)}$. Функцию $X(\tau, t)$ можно представить в виде

$$X(\tau, t) = X_0(\tau, t) + ia_0 \ln \tau, \tag{5}$$

где $X_0(\tau, t)$– однозначная аналитическая функция в $G_{\rho(t)}$, а коэффициент a_0– постоянная величина, определяемая через начальные условия. Постоянство a_0 следует из известной в гидродинамике теоремы Томпсона. Подставляя (5) в (1)-(4), получим условия для определения однозначных аналитических в $G_{\rho(t)}$ функций $F(\tau, t)$ и $X_0(\tau, t)$, которые при $t = 0$ принимают значения $F(\tau, 0)$, $X_0(\tau, 0)$.

2. Рассмотрим две такие краевые задачи:

$$Re\ F^+(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = \mu(\sigma, t), \quad Re\ F^+(e^{i\sigma}, t) = 0, \quad F^+(1, t) = 0; \tag{6}$$

$$Re\ X_0^+(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = \lambda(\sigma, t), \ Im\ X_0^+(e^{i\sigma}, t) = 0 \tag{7}$$

для однозначных аналитических по τ при каждом t функций $F(\tau, t)$ и $X_0(\tau, t)$, предполагая, что $\mu(\sigma, t)$ и $\lambda(\sigma, t)$– заданные достаточно гладкие по обоим аргументам функции, $2\pi-$периодические по σ. Решение задачи Дирихле (6) и смешанной задачи (7) в кольце $G_{\rho(t)}$ можно представить в виде:

$$F(\tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(s, t) L_0(\tau, \rho, s) ds + iC \tag{8}$$

и

$$X_0(\tau,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(s,t)L_{\pi/2}(\tau,\rho,s)ds \tag{9}$$

соответственно, где $L_0(\tau,\rho,s)$, $L_{\pi/2}(\tau,\rho,s)$– вполне определенные ядра, C– вещественная постоянная, которую можно определить из условия нормировки

$$C=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\mu(s,t)L_0(1,\rho,s)ds. \tag{10}$$

При этом функция $X_0(\tau,t)$ однозначна, а необходимое и достаточное условие однозначности функции $F(\tau,t)$ содержится в равенстве

$$\int_0^{2\pi}\mu(s,t)ds=0. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$S_\kappa(u,\rho)=-\frac{\cot\ \kappa}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(s,t)ds+Su+R(u,\rho,\kappa),$$

$$S_0(u,\rho)=Su+R(u,\rho,0),\quad S_{\pi/2}(u,\rho)=Su+R(u,\rho,\pi/2),$$

$$R(u,\rho,\kappa)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u(s)\sum_{\mathbf{k}=1}^{\infty}\frac{\rho^{2\mathbf{k}}}{1-2\rho^{2\mathbf{k}}\cos\ 2\kappa+\rho^{4\mathbf{k}}}[\sin\mathbf{k}(\sigma-s)(\cos 2\kappa-\rho^{2\mathbf{k}})$$

$$-\cos\mathbf{k}(\sigma-s)\sin 2\kappa]ds,\quad Su=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(s)\cot\frac{s-\sigma}{2}ds,$$

тогда $F(\rho(t)e^{i\sigma},t)=\mu(\sigma,t)+iS_0(\mu,\rho)+iC$, $X_0(\rho(t)e^{i\sigma},t)=\lambda(\sigma,t)+iS_{\pi/2}(\lambda,\rho)$.

Если к условию (1) добавить следующее из (3) условие:

$$Re\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{+}=0 \text{ на } |\tau|=1, \tag{12}$$

то для определения аналитической по τ функции $F_t(\tau,t)$ в кольце $G_{\rho(t)}$ также получим задачу Гильберта. Вследствие сделанных предположений эта задача имеет нулевой индекс для достаточно малых значений t. Задача (1), (12) можно решить, как обычно, последовательно решая две задачи Дирихле в той же области. Если затем воспользоваться формулами Сохоцкого, то для предельных значений искомой функции на границе получим следующее выражение:

$$F_t(\rho(t)=e^{i\sigma},t)e^{if-S_0(f,\rho)}[p+iS_{\kappa(f)}(p,\rho)], \tag{13}$$

где

$$f=-\operatorname{arctg}\frac{\mu_\sigma}{1+S_0(\mu_\sigma,\rho)},\ f_1=e^{S_0(f,\rho)}[\mu_\sigma^2+(1+S_0(\mu_\sigma,\rho))^2]^{1/2},\ f_2=-\rho^{-2}e^{-2\mu}f_1^{-1}$$

$$\times S_{\pi/2}(\lambda_\sigma,\rho)e^{2S_0(f,\rho)}, \quad \kappa(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f ds, \quad p=f_2+\frac{\rho\prime}{\rho}f_1.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_t=e^{-S_0(f,\rho)}(f_2\cos f-S_{\kappa(f)}(f_2,\rho)\sin f)-\frac{\rho\prime}{\rho}(1+e^{-S_0(f,\rho)}S_{\kappa(f)}(f_1,\rho)\sin f)). \quad (14)$$

Из условия (2) имеем

$$\lambda_t=-\frac{(\lambda_\sigma-a_0)S_{\kappa(f)}(f_2,\rho)}{f_1}+\frac{1}{2}\frac{(S_{\pi/2}(\lambda_\sigma,\rho))^2-(\lambda_\sigma-a_0)^2}{\rho^2e^{2\mu}f_1}e^{-S_0(f,\rho)}+q(Re\rho(t)$$

$$\times e^{i\sigma+\mu+iS_0(\mu,\rho)+iC}, Im\rho(t)e^{i\sigma+\mu+iS_0(\mu,\rho)+iC},t)+\frac{\rho\prime}{\rho}\left(S_{\frac{\pi}{2}}(\lambda_\sigma,\rho)-\frac{\lambda_\sigma-a_0}{f_1}S_{\kappa(f)}(f_1,\rho)\right). \quad (15)$$

И, наконец, условие (11) позволяет найти величину $\rho\prime$:

$$\rho\prime=\rho\frac{\int_0^{2\pi}e^{-S_0(f,\rho)}(f_2\cos f-S_{\kappa(f)}(f_2,\rho)\sin f)ds}{\int_0^{2\pi}(1+e^{-S_0(f,\rho)}S_{\kappa(f)}(f_1,\rho)\sin f)ds}. \quad (16)$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна задаче определения функций $\mu(\sigma,t)$ $\lambda(\sigma,t)$, $\rho(t)$, удовлетворяющих интегро-дифференциальным уравнениям (14)-(16) и начальным условиям

$$\mu(\sigma,0)=\mu_0(\sigma), \quad \lambda(\sigma,0)=\lambda_0(\sigma), \ \rho(0)=\rho_0. \quad (17)$$

Заметим, что после исключения величины $\rho\prime$ из правых частей (14) и (15) получаем "нормальную"форму задачи Коши.

3. Воспользуемся заменой

$$\mu(\sigma,t)=\bar\mu(\sigma,t)+\mu_0(\sigma), \quad \lambda(\sigma,t)=\bar\lambda(\sigma,t)+\lambda_0(\sigma), \quad \rho(t)=\bar\rho(t)+\rho_0,$$

и для функций $\bar\mu(\sigma,t)$, $\bar\lambda(\sigma,t)$, $\bar\rho(t)$ получим задачу Коши с нулевыми начальными условиями. Предположим, что функция $\mu_0(\sigma)$, $\lambda_0(\sigma)$- аналитические и $2\pi-$ периодические, $0<\rho_0<1$, и начальная точка (μ_0,λ_0,ρ_0) такова, что

$$\mu_{0\sigma}^2+(1+S_0(\mu_{0\sigma},\rho_0))^2\neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(1+e^{-S_0(f_0,\rho_0)}S_{\kappa(f_0)}(f_{10},\rho_0)\sin f_0)ds\neq 0, \quad (18)$$

$$\kappa(f_0)\neq 0,$$

где $f_0=-\arctan\frac{\mu_{0\sigma}}{1+S_0(\mu_{0\sigma},\rho_0)}$, $f_{10}=e^{S_0(f_0,\rho_0)}[\mu_{0\sigma}^2+(1+S_0(\mu_{0\sigma},\rho_0))^2]^{1/2}$.

В этом случае решение задачи Коши ищется в виде

$$\bar{\mu}(\sigma,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mu^{(n)}(\sigma),\ \bar{\lambda}(\sigma,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^{(n)}(\sigma),\ \bar{\rho}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\rho^{(n)}. \tag{19}$$

При выполнении условий (18), разлагая в ряды по t правые части уравнений, получим рекуррентные соотношения, однозначно определяющие величину $U^{(n)}=(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)},\rho^{(n)})$, $U^0=(0,0,0)$, $U^{(n)}=U^{(n)}(U^{(0)},...,U^{(n-1)})$, причем $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$– аналитические и 2π-периодические функции. Для доказательства сходимости рядов (19) вводятся формальные нормы

$$\|u\|_{r,\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\left\|\frac{\partial^n u}{\partial\sigma^n}\right\|_{\alpha}, \tag{20}$$

где под $\|\cdot\|_{\alpha}$ понимается норма функций в пространстве непрерывных по Гельдеру функций с показателем $0<\alpha<1$, определенных на $(0,2\pi)$ и 2π-периодических, и строятся аналитические мажоранты аналогично тому, как это делается в [1]. Существенным фактом при этом является возможность оценки $\|Su_{\sigma}\|_{r,\alpha}\ll C(\alpha)\,\frac{\partial}{\partial r}\|u\|_{r,\alpha}$, которая следует из оценки сингулярного оператора с ядром Гильберта и свойств формальной нормы (20) [2].

Теорема. *Пусть начальные условия $(\mu_0(\sigma),\lambda_0(\sigma),\rho_0)$ удовлетворяют условиям (18) и функции $\mu_0(\sigma),\lambda_0(\sigma)$ – аналитические и 2π-периодические, тогда в некоторой окрестности точки $t=0$ существует единственное аналитическое решение задачи Коши для данной системы.*

Если по найденной функции $\mu(\sigma,t)$ построить $z=\tau e^{F(\tau,t)}$, то функция $z^{+}(\rho(t) \times e^{i\sigma},t)=x(\sigma,t)+iy(\sigma,t)$ определит параметрическое описание свободной границы $\gamma(t)$.

Список литературы

[1] I. Leray et Y. Ohya, Equations et systems non-lineaires Hyperboliques Nonstricts, *Math. Ann., Band* **170**, 3 (1967).

[2] А.Б. Шабат, Задача Коши для псевдодифференциального уравнения, Новосибирск, 1967.

ОБ ОДНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Математическая Физика–1968,–№7

Внутри полубесконечной полосы $\Pi_t : y \in (0, \infty)$, $t \in (0, T)$ требуется найти линию (свободную границу) $\gamma_t : y = y(t)$ по следующим условиям. Пусть $y = y(t)$ делит Π_t на две части: Ω_t, прилегающую к оси t, и $G_t = \Pi_t \backslash \Omega_t$. В каждой из этих областей определена функция $u(y, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в} \ \ \Omega_t \ \ \text{и} \quad G_t, \tag{1}$$

начальным и граничным условиям

$$u(y, 0) = u_0(y), \qquad\qquad u(0, t) = 0. \tag{2}$$

Вдоль γ_t, общей части $\partial\Omega_t$ и ∂G_t, выполнены условия

$$u(y(t), t) = c_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{-} - \frac{\partial u}{\partial y}|_{+} = -\lambda \frac{dy(t)}{dt}, \tag{4}$$

где $\lambda = const.$, а слева стоит разность предельных значений производных функций $u(y, t)$ со стороны Ω_t и G_t соответственно. Последнее носит условия Стефана. Будем предполагать, что $u_0(y)$– ограниченная функция с конечной нормой $\|u_0\|_{C^2(0,+\infty)}$, функция $c_1(t)$– непрерывно дифференцируемая, выполнены условия согласования $u_0(0) = 0$, $y(0) = \delta > 0$, и $u_0(y(0)) = c_1(0)$.

В отличие от известных ранее способов исследования подобных задач [1], получается удобное для наших целей представление решения задачи (1), (2), (4), а затем, с помощью (3), находится функциональное уравнение для определения функции $y = y(t)$.

Пусть $\eta(y, t)$– достаточно гладкая в Π_t функция и $\eta(y, 0) = 0$, $\eta(0, t) = 0$. Умножим уравнение (1) на $\eta(y, t)$ и проинтегрируем по каждой из областей Ω_t и G_t. Интегрируя по частям и складывая полученные равенства, с учетом (4), получаем

$$\iint\limits_{\Pi_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \eta + u_y \eta_y \right) dydt - \int_{\gamma_t} \lambda \eta \cos(N, t) ds - \int_{\partial \Pi_t} u_y \eta \cos(N, y) ds = 0,$$

где во втором слагаемом N– внешняя к Ω_t нормаль. Если ввести характеристическую функцию χ_{Ω_t} для области Ω_t, то это равенство можно переписать в виде

$$\iint\limits_{\Pi_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial \chi_{\Omega_t}}{\partial t} \right) \eta dy dt = 0.$$

Таким образом, в смысле теории обощенных функций внутри Π_t функция $u(y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda \frac{\partial \chi_{\Omega_t}}{\partial t}. \tag{5}$$

Пусть $G(y,\eta,t,\tau)$– функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в полуполосе Π_t

$$G(y,\eta,t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}[exp(-(y-\eta)^2/4(t-\tau)) - exp(-(y+\eta)^2/4(t-\tau))].$$

Тогда решение задачи (5), (2) можно записать в виде

$$u(y,t) = -\iint\limits_{\Pi_t} \lambda \frac{\partial \chi_{\Omega_\tau}}{\partial \tau} G(y,\eta,t,\tau) d\eta d\tau + \int_0^{+\infty} u_0(\eta) G(y,\eta,t,0) d\eta,$$

или, после некоторых преобразований,

$$u(y,t) = \int_{\gamma_t} \lambda G \cos(N,\tau) ds + \int_0^{+\infty} u_0(\eta) G(y,\eta,t,0) d\eta,$$

а, если γ_t задана в виде $y = y(t)$, то

$$u(y,t) = -\int_0^t \lambda y_\tau G(y, y(\tau), t(\tau)) d\tau + \int_0^{+\infty} u_0(\eta) G(y,\eta,t,0) d\eta. \tag{6}$$

При определенных условиях гладкости на функции $y(t)$, $u_0(y)$ функция $u(y,t)$, представляемая равенством (6), удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей Ω_t и G_t, начальному и граничному условиям (2). Кроме того, вследствие теоремы о скачке производных потенциала простого слоя [2], эта функция удовлетворяет также условию (4). Таким образом, мы получим решение задачи Стефана, если сумеем также удовлетворить условию (3). Предположив, что в представлении (6) можно перейти к пределу при $y \to y(t)$, мы потребуем, чтобы выполнялось равенство:

$$c_1(t) = -\int_0^t \lambda y_\tau G(y(t), y(\tau), t, \tau) d\tau + \int_0^{+\infty} u_0(\eta) G(y(t), \eta, t, 0) d\eta, \tag{7}$$

которое можно рассматривать, как уравнение для нахождения функции $y(t)$. Пусть $y = y(t)$- непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяет (7), тогда, очевидно, что функция $u(y,t)$, построенная по (6) с указанной $y(t)$, является решением задачи (1)-(4).

Обозначим

$$F(y,t) = F_1(y,t) + F_2(y,t) + F_3(y,t);$$

$$F_1(y,t) = -\int_0^t \frac{y_\tau(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(y(t)-y(\tau))^2}{4(t-\tau)}} - 1\right]d\tau;$$

$$F_2(y,t) = \int_0^t \frac{y_\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(y(t)+y(\tau))^2}{4(t-\tau)}}d\tau;$$

$$F_3(y,t) = \frac{1}{\lambda}\left[\int_0^t u_0(\eta)G(y(t),\eta,t,0)d\tau - c_1(t)\right];$$

$$F_i(y,0) = 0, \quad i = 1,2,3,$$

после чего уравнение (7) перепишем в виде

$$\int_0^t \frac{y_\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau = F(y,t). \tag{8}$$

Обращая оператор, стоящий в левой части (8), относительно функции $y(t)$, получаем

$$y(t) - y(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{F(y,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}.$$

Введением новой переменной $z(t) = y(t) - y(0)$ приведем полученное уравнение к виду

$$z(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{F(z,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}, \quad F(z,t) = F(y,t),$$

которое запишем так:

$$z = A(z). \tag{9}$$

При исследовании оператора $A(z)$ весьма полезной оказывается следующая лемма (см. [3]).

Пусть $\varphi \in C^{\frac{1+\beta}{2}}$, $0 < \beta \le 1$, $\varphi(0) = 0$. Тогда функция

$$\varphi(t) = \int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)d\tau$$

имеет при $t > 0$ производную

$$\varphi'(t) = \varphi(t)t^{-1/2} + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^{-3/2}(\varphi(t) - \varphi(\tau))d\tau, \tag{10}$$

причем

$$|\varphi'(t)| \leq C\beta^{-1}[\varphi]_{\frac{1+\beta}{2}} t^{\beta/2}, \tag{11}$$

$$|\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)| \leq C\beta^{-1}[\varphi]_{\frac{1+\beta}{2}} (\Delta t)^{\beta/2}, \tag{12}$$

где $[\varphi]_{\frac{1+\beta}{2}}$– константа Гельдера функции $\varphi(t)$.

Используя представления функций $F_i(z,t)$, можем доказать, что для любого $T > 0$ в шаре $\|z\|_{C^1(0,T)} \leq m$, где $m \leq \delta(1-\mu)$, μ– произвольное число из (0,1),

$$\|F(z_1,t) - F(z_2,t)\|_{C^1(0,T)} \to 0 \ \text{ при } \|z_1 - z_2\|_{C^1(0,T)} \to 0,$$

что вместе с представлением (10) дает непрерывность оператора $A(z)$ в пространстве $C^1(0,T)$. Кроме того, можно получить также оценки

$$\max_t |F(z,t)| \leq 3m\pi^{-1/2}T^{1/2} + 2\lambda^{-1}\|u_0\|_{C(0,\infty)} + \lambda^{-2}\|c_1\|_{C(0,T)} \equiv \gamma_0;$$

$$\max_t |F'(z,t)| \leq 7m^3\pi^{-1/2}T^{1/2}/8 + 2m\lambda^{-1}\|u_0\|_{C^1(0,\infty)} + \lambda^{-1}\|c_1\|_{C^1(0,T)} + 2\|u_0\|_{C^2(0,\infty)}$$

$$+\frac{mT^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}[(\mu\delta)^{-2}e^{-1} + 4me^{-3/2} + 8(\mu\delta)^{-2}e^{-2}] \equiv \gamma_1.$$

Используя (11) с $\beta = 1$, получаем, что, если m и T связаны соотношением

$$2\pi^{-1/2}(\gamma_0 + C\gamma_2)T^{1/2} \leq m,$$

которое всегда можно удовлетворять за счет выбора достаточно малого T, то оператор $A(z)$ переводит шар $\|z\|_{C^1(0,T)} < m$ в себя.

В соответствии с (12), $A(z)$ как функция от t удовлетворяет условию Гельдера с показателем 1/2 и имеет равномерно ограниченную для всех z из шара $\|z\|_{C^1(0,T)} < m$ постоянную Гельдера. Отсюда следует компактность оператора $A(z)$.

Итак, мы показали, что для уравнения (9) выполнены все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Теорема. Пусть $u_0(y) \in C^2(0,\infty)$, $c_2(t) \in C^1(0,T)$, $y(0) = \delta > 0$, $u_0(\delta) = c_1(0)$. Тогда при достаточно малом T существует решение задачи Стефана (1)-(4), функция $y = y(t) \in C^{3/2}(0,T)$.

Список литературы

[1] Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана.- Рига: Звайгзне, 1967.

[2] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.- М.: Мир, 1968.

[3] Камынин П.И. К теории Жевре для параболических потенциалов.- Дифференциал. уравнения, 1972, 8, № 3.

ОБ ОДНОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

Доклады АН УССР–1976,–№1

1. Рассматривается следующая задача. Пусть Π– прямоугольник $-1 < x < 1$, $0 < y < h$ в плоскости (x, y). Назовем жорданову дугу γ–допустимой, если она симметрична относително оси y, все ее внутренние точки расположены в Π, а концы на отрезках $x = \pm 1$, $0 < y < h$. Такая дуга разбивает Π на две связные части: область Ω, прилегающую к нижнему основанию Π, и область G, прилегающую к верхнему основанию Π.

Требуется найти достаточно гладкую допустимую дугу γ (свободную границу) и непрерывную в $\bar{\Pi}$ функцию $w(x, y)$ по условиям:

$$\Delta w + \frac{\partial \bar{\beta}(w)}{\partial y} = 0 \text{ в } \Omega \text{ и } G; \tag{1}$$

$w = 0$ при $y = 0$, $w = c_2$ при $y = h$,

$$w = c_1, \quad 0 < c_1 < c_2 \quad \text{на } \gamma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \bar{\alpha}(w) = 0 \text{ при } x = \pm 1; \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^{-} - \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^{+} = \lambda(x)\cos(\nu, t) \quad \text{на } \gamma; \tag{4}$$

где $\bar{\beta}(t) = \beta_0 t + \mu\beta(t)$, $\bar{\alpha}(t) = \alpha_0 t + \mu\alpha(t) \geq 0$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$– дважды непрерывно дифференцируемые функции, μ– численный параметр, $\lambda(x)$– четная функция из класса Гельдера, $\lambda(1) = 0$. В соотношении (4) слева стоит разность между предельными значениями нормальных производных на искомой линии γ со стороны области Ω и G соответственно.

Такого типа задача возникает при отыскании линии кристализации (свободной границы) затвердевающего в полубесконечной полосе $-1 < x < 1$, $y < 0$ металла (задача Стефана) в предположении, что свободная граница, не изменяя своей формы, движется вверх с постоянной скоростью. При этом предполагается, что теплофизические параметры вещества зависят от температуры. Следствием этого является квазилинейность рассматриваемой задачи. Модельность нашей задачи заключается, в основном, в предположении, что $\lambda = \lambda(x)$ и $\lambda(1) = 0$, так что, например, случай $\lambda = const$ требует специального исследования.

2. Пусть $G(x,y;\xi,\eta,)$– функция Грина для оператора $\Delta+\beta_0\frac{\partial}{\partial\eta}$ и удовлетворяет граничные условия: $G=0$ при $\eta=0$, $\eta=h$, $\frac{\partial G}{\partial\nu}+\alpha_0 G=0$ при $\xi=1$, $\frac{\partial G}{\partial\nu}=0$ при $\xi=0$. Если свободная граница $y=y(x)$ известна, то нетрудно проверить, что функция $w(x,y)$ из (1)-(4) удовлетворяет равенству

$$w(x,y)=\int_0^1\lambda(\xi)G(x,y;\xi,y(\xi))d\xi+\int\int\limits_{\Pi}\mu\frac{\partial\beta(w)}{\partial\eta}G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$-\int_0^1 c_2\frac{\partial G}{\partial\eta}(x,y;\xi,h)d\xi-\int_0^h\mu\alpha(w)G(x,y;1,\eta)d\eta, \qquad (5)$$

которое можно было бы принять в качестве исходного для нахождения функции $w(x,y)$. При достаточной гладкости $y(x)$ первый член справа в (5) обеспечивает выполнение условия (4). Эвристические рассуждения, приводящие к (5), состоят в следующем. Умножим уравнение (1) на достаточно гладкую функцию в Π и проинтегрируем вначале по области Ω, а затем по области G. Применяя формулу Грина, складывая полученные равенства и используя соотношение (4) на γ, получим, что в смысле теории обобщенных функций искомая функция $w(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta w+\frac{\partial\bar\beta(w)}{\partial y}=\lambda(x)\frac{\partial\chi_\Omega}{\partial y}\ \text{в}\ \Pi \qquad (6)$$

и граничным условиям (2), (3), где χ_Ω- характеристическая функция области Ω. Теперь с помощью функции Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ можно получить (5).

Предполагая непрерывность каждого члена в (5), мы получим соотношение для нахождения линии γ, если используем последнее условие в (3):

$$c_1-\int_0^1\lambda(\xi)G(x,y(x);\xi,y(\xi))d\xi-\int\int\limits_{\Pi}\mu\frac{\partial\beta(w)}{\partial\eta}G(x,y(x);\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$+\int_0^1 c_2\frac{\partial G}{\partial\eta}G(x,y(x);\xi,h)d\xi+\int_0^h\mu\alpha(w)G(x,y(x);1,\eta)d\eta=0. \qquad (7)$$

Будем рассматривать теперь равенства (5),(7) как систему уравнений для нахождения двух неизвестных $w(x,y)$ и $y(x)$.

3. Основным инструментом доказательства разрешимости задачи (5), (7) является теорема о неявных функциях в функциональных пространствах [1]. Наши дальнейшие рассуждения состоят в следующем. Зададимся некоторой четной функцией $y(x)\in C^{1+\alpha}[-1,1]$. Можно доказать разрешимость уравнения (5) относительно функции $w(x,y)$ при достаточно малых значениях параметра μ и сделанном выборе $y(x)$. Подставим найденное значение $w(x,y,y(x))$ в (7) и получим функциональное уравнение

$$F(y(x),\lambda,\mu)=0 \qquad (8)$$

для нахождения функции $y(x)$. Пусть $w_0(x,y)$– решение задачи (1)-(4) при $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Предположим, что $\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} > 0$ в $\bar{\Pi}$, это предположение выполнено, например, при $\beta_0 = 0$. Пусть $\{(x,y) \in \Pi : \ w_0(x,y) = c_1\}$-линия уровня функции $w_0(x,y)$, которую можно также представить в виде $y = y_0(x)$. Тогда $y_0(x)$– четная функция из класса $C^{1+\alpha}[-1,1]$. Непосредственно проверяется, что $F(y_0(x),0,0) = 0$.

Пусть E_1– банахово пространство функций $y(x) \in C^{1+\alpha}[0,1]$, удовлетворяющих условию $y'(0) = 0$, E_2– банахово пространство пар $(\lambda(x),\mu)$, где $\lambda(x) \in C^{\alpha}[0,1]$, $\lambda(1) = 0$, $\mu \in R$. Будем рассматривать $F(y(x),\lambda,\mu)$ как оператор, действующий из $E_1 \times E_2$ в E_1. Для применимости теоремы о неявных функциях нужно доказать непрерывную дифференцируемость оператора F в окрестности точки $(y_0(x),0,0)$ этот факт, доказательство которого мы опускаем вследствие ограниченности места, вызывает наибольшие технические трудности в данной работе, и обратимость оператора $F'_y(y_0(x),0,0)$. Последнее свойство следует из условия $\frac{\partial w_0}{\partial y}(x,y) > 0$ в $\bar{\Pi}$.

Теорема. Пусть $\lambda(t) \in C^{\alpha}[0,1]$, $\lambda(1) = 0$, $1/2 < \alpha < 1$ и пусть $\frac{\partial w_0}{\partial y}(x,y) > 0$ в $\bar{\Pi}$, где $w_0(x,y)$– решение задачи (1)-(4) при $(\lambda,\mu) = 0$. Тогда существует единственное решение $y = y(x,\lambda,\mu) \in E_1$ уравнения (7) в некоторой окрестности нуля пространства E_2.

Таким образом, при указанных выше условиях существует классическое решение сформулированной задачи.

Список литературы

[1] Л.В. Канторович, Г.П. Акимов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., ГИФМЛ, 1959.

STABILITY OF SMOOTH SOLUTIONS OF THE TWO-PHASE STEFAN PROBLEM

*Soviet Math. Dokl.–1982,–**25** 1*

1. Let $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le l\}$ and $G = \Omega \times (0, T)$. In the domain G it is required to find a surface $x_2 = \xi(x_1, t)$ (for each $t \ge 0$ the curve $x_2 = \xi(x_1, t)$ partitions Ω into parts Ω_{1t} and Ω_{2t} abutting respectively the lower and upper base of Ω, so that the end points of this curve lie on the vertical lines $x_1 = 0$ and $x_1 = 1$) and functions $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, from the following conditions:

$$\gamma^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} = 0 \ \ in\ G_i(T) = \{(x, t) :\ x \in \Omega_{it},\ t \in (0, T)\},$$

$$u_1(x_1, 0, t) = 0, \quad u_2(x_1, l, t) = d > 1,\ u_i(x_1, \xi(x_1, t), t) = 1,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1}|_{x_1=0,1} = 0, \quad u_i(x, 0) = u_{i0}(x), \quad \xi(x_1, 0) = \xi_0(x_1),$$

$$(1 + \xi_{x_1}^2)(u_{1x_2} - k u_{2x_2}) = \mu \xi_t \ \ for \ \ x_2 = \xi(x_1, t),$$

where γ, k and μ are positive constants. The last condition is one of the forms of writing the Stefan condition on the free (unknown) boundary $x_2 = \xi(x_1, t)$.

For $t = 0$ we moreover assume that consistency conditions are satisfied which on the free boundary take the form

$$u_{i0}(x_1, \xi(x_1, 0), 0) = 1, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta u_{i0} + \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_2} \gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial t}(x_1, 0) = 0 \ \ for\ x_2 = \xi(x_1, 0),\ i = 1, 2,$$

$$(1 + \xi_{0x_1}^2)(u_{10x_2} - k u_{20x_2}) = \mu \xi_t(x_1, 0) \ \ for \ \ x_2 = \xi(x_1, 0).$$

These conditions make it possible to extend the desired functions $u_i(x_1, x_2, t)$ and $\xi(x_1, t)$ as even functions of the variable x_1, i.e., to seek solutions periodic in x_1.

In the domain Ω_{1t} we make the change of variables $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2/\xi(x_1, t)$, and in Ω_{2t} the change of variables $y_1 = x_1$, $y_2 = (l - x_2)/(l - \xi(x_1, t))$. Let $D = \{(y_1, y_2) : -1 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1\}$, $D_1 = \{y_1 : -1 \le y_1 \le 1\}$, $D(T) = D \times (0, T)$ and $D_1(T) = D_1 \times (0, T)$. The original problem then reduces to finding functions $\xi(y_1, t)$ and $v_i(y, t)$, $i = 1, 2$, and fixed domains $D_1(T)$ and $D(T)$ respectively from the following conditions:

$$\gamma^2 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \Phi_i(y, v_i, D_y v_i, D_y^2 v_i, \xi, D_{y_1}\xi, D_{y_1}^2 \xi) = 0,$$

$$v_1(y_1,0,t)=0,\ v_2(y_1,0,t)=d,\ v_i(y_1,1,t)=1,\ \frac{\partial v_i}{\partial y_1}|_{y_1=0,1}=0,$$

$$v_i(y,0)=v_{i0}(y),\quad \xi(y_1,0)=\xi_0(y_1),$$

$$(1+\xi_{y_1}^2)\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\xi^{-1}+k\frac{\partial v_2}{\partial y_2}(l-\xi)^{-1}\right)=\mu\xi_t \;\; for\ y_2=1, \tag{1}$$

such that the consistency conditions are satisfied at $t=0$.

The system (1) has the unique stationary solution

$$v_{01}=y_2,\quad v_{02}=1+(d-1)(1-y_2),\quad \xi(y_1,t)=h=const,$$

where h is found from the condition

$$\varphi(h)\equiv h^{-1}-k(d-1)(l-h)^{-1}=0,$$

which is a consequence of the last condition of the system.

Let $u_i=v_i-v_{0i}$ and $s=\xi-h$. For $u_i(y,t)$ and $s(y_1,t)$ we obtain a system of equations and initial and boundary conditions analogous to (1) for which $u_i=0$, $s=0$ is a stationary solution. If from the nonlinear system thus obtained we separate out the linear part and take the remaining nonlinear part to the right side, then we obtain the following problem:

$$\gamma^2\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}-h^{-2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2^2}-y_2h^{-1}\left(\gamma^2\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{\partial^2 s}{\partial y_1^2}\right)=F_1,$$

$$\gamma^2\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2}-(l-h)^{-2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y_2^2}-y_2(d-1)(l-h)^{-1}\left(\gamma^2\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{\partial^2 s}{\partial y_1^2}\right)=F_2,$$

$$u_i(y,0)=u_{i0}(y),\quad u_i(y_1,1,t)=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial y_1}|_{y_1=0,1}=0,$$

$$s(y_1,0)=s_0(y_1),\quad u_i(y_1,0,t)=0,$$

$$\mu\frac{\partial s}{\partial t}-\varphi'(h)s-\left(h^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y_2}|_{y_2=1}+k(l-h)^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial y_2}|_{y_2=1}\right)=F_0, \tag{2}$$

where $F_i=F_i(y,u,D_yu,D_y^2u,s,D_{y_1}s,D_{y_1}^2s)$, $i=0,1,2$, $u=(u_1,u_2)$, and

$$F_i(y,0,...,0)=\frac{\partial F_i}{\partial u}(y,0,...,0)=...=\frac{\partial F_i}{\partial D_{y_1}^2 s}(y,0,...,0)=0.$$

The solvability of the system (2) or, equivalently, of (1) we prove following [1] by means of the principle of contraction mapping in the classes $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$ (see [2]).

2. An essential feature of the proof of existence and stability of a solution of (2) is the use of the linear problem which is obtained from (2) by freezing the functional arguments on its right sides. Let $F_0\in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D_1(T)})$ and $F_i\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D_1(T)})$,

$i = 1, 2$, be even functions in the variable y_1. Using the Green function for the mixed boundary value problem for the heat equation, to find the functions $s(x,t)$, $x = y_1$, we obtain the integrodifferential equation

$$\mu\frac{\partial s}{\partial t} - \varphi'(h)s + A\int_0^t\int_{-1}^1 \sum_{n=1,k=0} a_{nk}e^{-A_{nk}(t-\tau)}\cos\pi kx\cos\pi k\xi\left[\frac{\partial s}{\partial\tau} - \gamma^{-2}\frac{\partial^2 s}{\partial\xi^2}\right]d\xi d\tau$$

$$+B\int_0^t\int_{-1}^1 \sum_{n=1,k=0} a_{nk}e^{-B_{nk}(t-\tau)}\cos\pi kx\cos\pi k\xi\left[\frac{\partial s}{\partial\tau} - \gamma^{-2}\frac{\partial^2 s}{\partial\xi^2}\right]d\xi d\tau = F(x,t), \quad (3)$$

where

$$A = h^{-2},\ B = k(d-1)(l-h)^{-2},\ \ A_{nk} = \left(\frac{\pi n}{\gamma h}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{\gamma}\right)^2,$$

$$B_{nk} = \left(\frac{\pi n}{\gamma(l-h)}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{\gamma}\right)^2,\ a_{nk} = 2\ for\ k \geq 1,\ \ a_{n0} = 1,$$

while the function $F(x,t)$ is constructed on the basis of the functions F_0, F_i and u_{i0}, $i = 1, 2$. To equation (3) it is necessary to adjoint the initial condition

$$s(x,0) = s_0(x).$$

It is natural to seek a solution of (3) in the form

$$s(x,t) = c_0(t) + \sum_{m=1} c_m(t)\cos\pi mx, \quad (4)$$

assuming that the quantities $c_m(0)$, $m = 0, 1, ...$, are given. For the coefficients of (4) we obtain an infinite decomposing system of equations each of which is a Volterra equation of second kind for $c'_m(t)$ with kernel having a weak singularity. There is thus no question as to the solvability of this system. However, to study the differential properties of $s(x,t)$ it is necessary to study the asymptotic behaviour of the coefficients $c_m(t)$ with respect to m. In connection with this we shall obtain explicit expressions for the solution $c_m(t)$ in terms of the right sides and the initial conditions. Since these equations have difference kernels, the Laplace transform on t is appropriate. We have

$$\hat{c}_m(p)R_m(p) = \hat{f}_m(p) + (\mu + 2A\sum_{n=1}(p + A_{nm})^{-1} + 2B\sum_{n=1}(p + B_{nm})^{-1})c_m(0),$$

$$R_m(p) = \mu p - \varphi'(h) + 2A\sum_{n=1}[p + (\pi m/\gamma)^2][p + A_{nm}]^{-1} + 2B\sum_{n=1}[p + (\pi m/\gamma)^2][p + B_{nm}]^{-1}.$$

Since $\varphi'(h) < 0$, all zeros p_{km} of the function $R_m(p)$ lie on the negative real axis in the p plane, and $p_{km} < -\delta_0$, $\delta_0 > 0$. By Cauchy's theorem (see [3]) we can represent the meromorphic function $[R_m(p)]^{-1}$ in the form

$$[R_m(p)]^{-1} = \sum_{n=1}\delta_{km}(p - p_{km})^{-1}, \quad (5)$$

where δ_{km} are the residues of the function $[R_m(p)]^{-1}$ at the poles p_{km}. Using (5) and the inverse Laplace transform, we obtain the solution $c_m(t)$. Analysis of the roots of the equation $R_m(p) = 0$ and the expression for δ_{km} enables us to separate out from the integral representation for $s(x,t)$ a principal part which has the form

$$(2\mu)^{-1} \int_0^t \int_{-1}^1 F(\xi,\tau) \sum_{m=0} e^{-\alpha m(t-\tau)} \cos \pi m(x-\xi) d\xi d\tau, \quad \alpha = const > 0,$$

and this leads to the following assertion.

Lemma. *Let $F_i(y,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D(T)})$, $i = 1,2$, $F_0(y,t) \in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D_1(T)})$, $u_{i0}(y) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ and $s_0(y_1) \in C^{2+\alpha}(D_1)$ be even functions of the variable y_1, and suppose that the consistency conditions are satisfied at $t = 0$. Then there exists a unique solution of the system (2), and*

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{D(T)}^{2+\alpha} + \|s\|_{D_1(T)}^{2+\alpha} \le C \left[\sum_{i=1}^{2} \|u_{i0}\|_D^{2+\alpha} + \|s_0\|_{D_1}^{2+\alpha} + \sum_{i=1}^{2} \|F_i\|_{D(T)}^{\alpha} + \|F_0\|_{D_1(T)}^{1+\alpha} \right]$$

with a constant C not depending on the time.

3. We denote by $W_{D(T)}$ the set of elements

$$w(y,t) = (s(y_1,t), u_1(y,t), u_2(y,t)),$$

even in y_1 with norm

$$\|w\|_{D(T)} = \|u_1\|_{D(T)}^{2+\alpha} + \|s\|_{D_1(T)}^{2+\alpha} + \|u_2\|_{D(T)}^{2+\alpha},$$

and we let $w_0 = (s_0(y_1), u_{10}(y), u_{20}(y))$. Let $H(M, w_0)$ be the closed set in $W_{(D(T))}$ consisting of elements

$$k(y,t) = (\eta(y_1,t), v_1(y,t), v_2(y,t)),$$

satisfying the initial conditions

$$\eta(y_1, 0) = s_0(y_1), \quad v_i(y,0) = u_{i0}(y), \quad i = 1,2,$$

and the condition $\|k\|_{D(T)} \le M\|w_0\|_{D(T)}$.

We define an operator K on the set $H(M,w_0)$ by setting $w = Kk$, where w is the solution of the linear problem (2) in which the right sides are computed on the element $k \in H(M,w_0)$. Just as in [1] (see Theorem 3.1), we show that K takes $H(M,w_0)$ into itself and is contractive; this leads to an existence theorem for solutions of the nonlinear system (1).

Theorem *Suppose that in problem (1) the consistency conditions at $t = 0$ are satisfied. Then there exist positive constants M and δ such that for*

$$\|\xi_0 - h\|_{D_1}^{2+\alpha} + \sum_{i=1}^{2} \|v_{i0} - v_{0i}\|_D^{2+\alpha} \le \delta$$

there exists a unique solution of the Stefan problem, and

$$\|\xi(y_1,t)-h\|^{2+\alpha}_{D_1(T)}+\sum_{i=1}^{2}\|v_i(y,t)-v_{oi}\|^{2+\alpha}_{D(T)}\leq M\left[\|\xi_0-h\|^{2+\alpha}_{D_1}+\sum_{i=1}^{2}\|v_{i0}-v_{0i}\|^{2+\alpha}_{D}\right].$$

The last inequality means that the solution of the Stefan problem is stable in the sense of the usual definition of stability.

Remark 1. The substitution $u_i = e^{-\alpha t}v_i$, $s = e^{-\alpha t}$ in the nonlinear system (2) with an appropriately chosen $\alpha > 0$ leads to a proof of asymptotic stability of the solution of the Stefan problem.

Remark 2. In the case of a more general formulation of the Stefan problem, for example, $u_2(x_1, l, t) = f(x_1)$, the corresponding linear system (2) is a system with variable coefficients. Therefore, to construct the inverse operator in this case a regularizer is first constructed by means of a partition of unity as is done in investigating linear parabolic problems (see [2]). The model problems arising here are analogous to the system (2).

The author expresses his gratitude to I.I. Daniljuk, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, for useful discussion of the results.

References

[1] V.S. Belonosov and T.I. Zelenjak, *Nonlocal problems in the theory of quasilinear parabolic equations,* Novosibirsk. Goc. Univ., Novosibirsk, 1975. (Russian)

[2] O.A. Ladyzhenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type,* "Nauka", Moscow, 1967; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

[3] M.A. Lavrent'ev and B.V. Shabat, *Methods of the theory of functions of a complex variable,* 3rd ed., "Nauka", Moscow, 1965; German transl., VEB Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1967.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ОКРЕСТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

Доклады АН УССР–1983,–№12

Изучаются вопросы существования и поведения решения двухфазной задачи Стефана при неограниченном возрастании времени в окрестности стационарного решения.

1. Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le l\}$, $G = \Omega \times (0, T)$. В области G требуется найти поверхность $x_2 = \xi(x_1, t)$ (при каждом t кривая $x_2 = \xi(x_1, t)$ разбивает Ω на части Ω_{1t}, Ω_{2t}, примыкающие соответственно к нижнему и верхнему основанию Ω, так что концы этой кривой лежат на вертикалях $x_1 = 0$, $x_1 = 1$) и функции $u_i(x, t)$ по следующим условиям:

$$\gamma^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = 0 \text{ в } G_i(T) = \{(x, t) : x \in \Omega_{it},\ t \in (0, T)\},$$

$$u_1(x_1, 0, t) = 0,\ u_2(x_1, l, t) = f(x_1) > 1,\ u_i(x_1, \xi(x_1, t), t) = 1,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1}|_{x_1=0,1} = 0, \quad u_i(x, 0) = u_{i0}(x),\ \xi(x_1, 0) = \xi_0(x_1),$$

$$(1 + \xi_{x_1}^2)(u_{1x_2} - k u_{2x_2}) = \mu \xi_t \text{ при } x_2 = \xi(x_1, t),$$

где γ, k, μ– положительные постоянные. Последнее условие есть одна из форм записи условия Стефана на свободной (неизвестной) границе $x_2 = \xi(x_1, t)$. Предполагется также, что при $t = 0$ выполнены условия согласования, которые, в частности, на свободной границе имеют вид:

$$u_{i0}(x_1, \xi(x_1, 0)) = 1,$$

$$\Delta u_{i0} + \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_2} \gamma^2 \frac{\partial \xi}{\partial t}(x_1, 0) = 0 \text{ при } x_2 = \xi_0(x_1),$$

$$(1 + \xi_{0x_1}^2)(u_{10x_2} - k u_{20x_2}) = \mu \xi_t(x_1, 0) \text{ при } x_2 = \xi_0(x_1).$$

Сформулированные условия позволяют продолжить искомые функции $u_i(x, t)$, $\xi(x_1, t)$ четным образом по переменной x_1, т.е. искать периодические по x_1 решения.

Замена переменных $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2/\xi(x_1, t)$ в области Ω_{1t} и $y_1 = x_1$, $y_2 = (l - x_2)/(l - \xi(x_1, t))$ в Ω_{2t} сводит исходную задачу с неизвестной границей к задаче нахождения функций $\xi(y_1, t)$, $v_i(y, t)$ в фиксированных областях $D_1(T) = D_1 \times (0, T)$,

$D_1 = \{y_1 : -1 \le y_1 \le 1\}$, $D(T) = D \times (0,T)$, $D = \{(y_1,y_2) : -1 \le y_2 \le 1,\ 0 \le y_2 \le 1\}$ соответственно по следующим условиям:

$$\gamma^2 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \Phi_i(y, v_i, D_y v_i, D_y^2 v_i, \xi, D_{y_1}\xi, D_{y_1}^2 \xi) = 0,$$

$$v_1(y_1,0,t) = 0, \quad v_2(y_1,0,t) = f(y_1), \quad v_i(y_1,1,t) = 1,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_1}|_{y_1=\pm 1} = 0,\ v_i(y,0) = v_{i0}(y),\ \xi(y_1,0) = \xi_0(y_1),$$

$$(1+\xi_{y_1}^2)(\xi^{-1} v_{1y_2} - k(l-\xi)^{-1} v_{2y_2}) = \mu \xi_t \text{ при } y_2 = 1, \tag{1}$$

для которой выполнены условия согласования при $t = 0$.

Замечание 1. Для приведения исходной задачи с неизвестной границей к задаче в фиксированной области можно было бы при некоторых ограничениях использовать и другие методы, например, преобразование вида $y_1 = x_1$, $y_2 = u(x_1, x_2, t)$, считая в области изменения переменных y_1, y_2 неизвестной функцией $x_2 = x_2(x_1, u; t)$. Для этой функции получим нелинейную задачу сопряжения, аналогичную (1), к которой также применим предлагаемый ниже способ исследования.

Пусть система (1) имеет стационарное решение $h(y_1)$, $w_i(y)$. Введем функции $s(y_1,t) = \xi(y_1,t) - h(y_1)$, $u_i(y,t) = v_i(y,t) - w_i(y)$. Из системы (1) получим для $s(y_1,t)$, $u_i(y,t)$ краевую задачу, для которой $s = 0$, $u_i = 0$ будет стационарным решением. Если из полученной таким образом системы выделить линейную часть, а оставшуюся нелинейную часть перенести вправо, то получим следующую задачу:

$$\gamma^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + 2y_2 h_{y_1} h^{-1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2^2}[y_2^2 h_{y_1}^2 + 1]h^{-2} + y_2 h^{-2}[h_{y_1y_1} h - 2h_{y_1}^2]\frac{\partial u_1}{\partial y_2}$$

$$-y_2 h^{-1} \frac{\partial w_1}{\partial y_2}\left[\gamma^2 \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial^2 s}{\partial y_1^2} + 2sh^{-2}(h_{y_1y_1} h - 2h_{y_1}^2) - h^{-1}(s h_{y_1y_1} - 4 s_{y_1} h_{y_1})\right]$$

$$+2\frac{y_2}{h}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1 \partial y_2}\left[\frac{\partial s}{\partial t} - s\frac{h_{y_1}}{h}\right] - h^{-2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_2^2}\left[2y_2^2 h_{y_1}\left(\frac{\partial s}{\partial y_1} - \frac{s h_{y_1}}{h}\right) - 2\frac{s}{h}\right] = F_1,$$

$$\gamma^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} - 2\frac{y_2 h_{y_1}}{l-h}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_2^2}\frac{y_2^2 h_{y_1}^2 + 1}{(l-h)^2} - \frac{y_2}{(l-h)^2}[h_{y_1y_1}(l-h) + 2h_{y_1}^2]\frac{\partial u_2}{\partial y_2}$$

$$+\frac{y_2}{l-h}\frac{\partial w_2}{\partial y_2}\left[\gamma^2 \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial^2 s}{\partial y_1^2} - \frac{2s}{(l-h)^2}(h_{y_1y_1}[l-h] + 2h_{y_1}^2) + \frac{s h_{y_1y_1} - 4 s_{y_1} h_{y_1}}{l-h}\right]$$

$$-\frac{2y_2}{l-h}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_1 \partial y_2}\left[\frac{\partial s}{\partial y_1} + \frac{s h_{y_1}}{l-h}\right] - \frac{1}{(l-h)^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2}\left[2y_2^2 h_{y_1}\left(\frac{\partial s}{\partial y_1} + \frac{s h_{y_1}}{l-h}\right) + \frac{2s}{l-h}\right] = F_2,$$

$$u_i(y,0) = u_{i0}(y), \quad s(y_1,0) = s_0(y_1), \quad u_i(y_1,0,t) = 0,\ u_i(y_1,1,t) = 0,\ \frac{\partial u_i}{\partial y_1}|_{y_1=\pm} = 0,$$

$$(1+h_{y_1}^2)s\left[\frac{1}{h^2}\frac{\partial w_1}{\partial y_2}-\frac{k}{(l-h)^2}\frac{\partial w_2}{\partial y_2}\right]-(1+h_{y_1}^2)\left[\frac{1}{h}\frac{\partial u_1}{\partial y_2}+\frac{k}{l-h}\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\right]$$
$$+\mu\frac{\partial s}{\partial t}=F_0 \qquad \text{при} \qquad y_2=1, \tag{2}$$

где $F_i = F_i(y, u, D_y u, D_y^2 u, s, D_{y_1} s, D_{y_1}^2 s, D_t s)$, $i = 0, 1, 2$, $u = (u_1, u_2)$, причем $F_i(y, 0, ..., 0) = \frac{\partial F_i}{\partial u}(y, 0, ..., 0) = ... = \frac{\partial F_i}{\partial D_t s}(y, 0, ..., 0) = 0$.

Докажем разрешимость системы (2) при достаточно малых u_{i0}, $s_0(y_1)$, следуя работе [1], с помощью принципа сжатых отображений в классах достаточно гладких функций $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ (см. [2]).

2. Рассмотрим систему (2), считая заданными ее правые части. Можно считать, что они получены замораживанием их функциональных аргументов. Пусть $F_0 \in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D_1(T)})$, $F_i \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{D(T)})$, $i = 1, 2$, четные по переменной y_1, тогда соответствующая задача (2) имеет вид линейной системы дифференциальных уравнений в общем случае с переменными коэффициентами.

Поэтому для ее исследования естественно применить метод построения регуляризатора, аналогично тому, как это сделано в работе [2]. При этом с помощью разбиения единицы исследование линейной задачи сводится к изучению некоторого набора модельных задач, одну из которых, связанную с наличием условия Стефана, иы сформулируем.

В плоскости $z_2 \geq 0$ плоскости (z_1, z_2) требуется найти функции $s(z_1, t)$, $u_k(z, t)$ по следующим условиям:

$$\gamma^2\frac{\partial u_k}{\partial t}-\sum_{ij}a_{ij}^{(k)}\frac{\partial^2 u_k}{\partial z_i \partial z_j}-c^{(k)}\left(\gamma^2\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{\partial^2 s}{\partial z_1^2}\right)=f_k, \quad k=1,2,$$

$$\mu\frac{\partial s}{\partial t}+b_1\frac{\partial u_1}{\partial z_2}|_{z_2=0}+b_2\frac{\partial u_2}{\partial z_2}|_{z_2=0}=f_0,$$
$$u_k(z_1,0,t)=0, \quad u_k(z,0)=s(z_1,0)=0, \tag{3}$$

где $f_k \in \underset{0}{H}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$, $f_0 \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}$, определение этих пространств см. в [2], $a_{ij}^{(k)}$, $c^{(k)}$, b_1, b_2-некоторые постоянные, фактически коэффициенты при старших членах в дифференциальных уравнениях и граничных условиях линейной системы (2), вычисленные в некоторой фиксированной точке $\bar{y} \in D_1$.

Таким образом, система (3) получается из системы (2) отбрасыванием младших членов, замораживанием коэффициентов в некоторой точке и переходом к местной системе координат. Система (3) достаточно просто решается формальным применением преобразования Фурье по переменной z_1 и преобразования Лапласа по t, после чего мы, например, получим, что

$$\tilde{s}=\frac{\tilde{f}(\lambda,p)}{c^2p+\sqrt{p+\delta^2\lambda^2}},$$

где $\tilde{s}$– образ функции $s(z_1,t)$ при указанных выше интегральных преобразованиях, c, δ– некоторые постоянные, $\tilde{f}$– образ функции $f(z_1,t) \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}$, которая строится определенным образом по функциям f_k, $k = 0,1,2$.

Используя обратные преобразования, получим

$$s(z_1,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(z_1-\zeta, t-\tau) f(\zeta,\tau) d\zeta d\tau, \tag{4}$$

где $K(z_1,t)$– прообраз функции $(c^2p+\sqrt{p+\delta^2\lambda^2})^{-1}$ (см. [3,с. 205]). Анализ представления (4) позволяет утверждать, что функция $s(z_1,t)$ есть, по крайней мере, элемент пространства $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ и выполняется оценка $\|s(z_1,t)\|^{(2+\alpha)}_{R_1(T)} \le C\|f(z_1,t)\|^{(1+\alpha)}_{R_1(T)}$, $R_1(T) = R_1 \times (0,T)$, $R_2(T) = R_2 \times (0,T)$, $z_2 \ge 0$. После того как найдена функция $s(z_1,t)$, нахождение функций $u_k(z,t)$ не вызывает затруднения.

Лемма 1. Линейная задача (3) однозначно разрешима и имеют место оценки

$$\|s(z_1,t)\|^{(2+\alpha)}_{R_1(T)} + \sum_{k=1}^{2} \|u_k(z,t)\|^{(2+\alpha)}_{R_2(T)} \le c\left(\|f_0\|^{(1+\alpha)}_{R_1(T)} + \sum_{k=1}^{2}\|f_k\|^{(\alpha)}_{R_2(T)}\right). \tag{5}$$

Модельные задачи, соответствующие внутренним точкам рассматриваемой области и точками границы, не нагруженной условием Стефана, рассмотрены в [2]. Исследование модельных задач, оценки типа (5) позволяют построить регуляризатор, а затем обратный оператор в линейной задаче (2) сначала для малых t, а затем и для произвольного промежутка времени.

Лемма 2. Пусть $F_i(y,t) \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{D(T)})$, $F_0(y_1,t) \in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{D_1(T)})$, $u_{i0}(y) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$, $s_0(y_1) \in C^{2+\alpha}(\bar{D}_1)$, четные по переменной y_1 и выполнены условия согласования при $t = 0$. Тогда для произвольного $T > 0$ существует единственное решение системы (2), причем выполняется неравенство

$$\|s\|^{(2+\alpha)}_{D_1(T)} + \sum_{i=1}^{2}\|u_i\|^{(2+\alpha)}_{D(T)} \le C\left(\|F_0\|^{(1+\alpha)}_{D_1(T)} + \sum_{i=1}^{2}\|F_i\|^{(\alpha)}_{D(T)} + \|s_0\|^{(2+\alpha)}_{D_1} + \sum_{i=1}^{2}\|u_{i0}\|^{(2+\alpha)}_{D}\right). \tag{6}$$

Постоянная C в неравенстве (6), вообще говоря, зависит от T.

3. Для доказательства разрешимости нелинейной задачи (2) выберем функциональное пространство $W_{D(T)}$, состоящее из элементов $w = (s(y_1,t), u_1(y,t), u_2(y,t))$, каждая компонента которых четная по y_1, с нормой $\|w\|_{D(T)} = \|s\|^{(2+\alpha)}_{D_1(T)} + \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|^{(2+\alpha)}_{D(T)}$. Пусть $w_0 = (s_0(y_1), u_{10}(y), u_{20}(y))$ и пусть $H(M,w_0)$- замкнутое множество в $W_{D(T)}$, состоящее из элементов $\kappa(y,t)$, удовлетворяющих начальному условию $\kappa(y,0) = w_0$ и неравенству $\|\kappa\|_{D(T)} \le M(T)\|w_0\|_{D(T)}$, где число $M(T)$ выбирается специальным образом.

На множестве H определим оператор K, положив $w = K\kappa$, где w– решение линейной задачи (2), в которой правые части вычислены на элементе $\kappa \in H(M,w_0)$.

Так же как в [1, теорема 3.1] покажем, что K переводит $H(M, w_0)$ в себя и является сжимающим, что приводит к теореме существоания решения нелинейной системы (1).

Теорема. Пусть в задаче (1) существует стационарное решение $h(y_1)$, $w_i(y)$ и выполнены условия согласования при $t = 0$. Тогда для любого $T > 0$ существуют положительные постоянные $M(T)$ и $\delta(T)$ такие, что при $\|\xi_0 - h\|_{D_1}^{(2+\alpha)} + \sum_{i=1}^{2} \|v_{i0} - w_i\|_D^{(2+\alpha)} \leq \delta(T)$ существует единственное решение задачи Стефана и выполняется неравенство

$$\|\xi(y_1,t)-h\|_{D_1(T)}^{(2+\alpha)}+\sum_{i=1}^{2}\|v_i(y,t)-w_i\|_{D(T)}^{(2+\alpha)} \leq M(T)\left(\|\xi_0 - h\|_{D_1}^{(2+\alpha)} + \sum_{i=1}^{2}\|v_{i0} - w_i\|_D^{(\alpha)}\right). \tag{7}$$

Замечание 2. Если в формулировке исходной задачи условие $u_2(x_1, l, t) = f(x_1)$ заменить более простым, $u_2(x_1, l, t) = d = const > 1$, то система (1) имеет стационарное решение $w_1 = y_2$, $w_2 = 1 + (d-1)(1-y_2)$ и число h находится из условия $h^{-1} + k(d-1)(l-h)^{-1} = 0$. В этом случае для построения обратного оператора соответствующей линейной системы (2) можно вначале обратить дифференциальные операторы $\gamma^2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - h^{-2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$, $\gamma^2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - (l-h)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$, а затем искать решение $s(y_1, t)$ в виде $s(y_1, t) = \sum_{m=0} c_m(t)\cos \pi m y_1$. При этом в оценках леммы 2 и теоремы постоянные можно выбрать не зависящими от T. Но тогда оценка (7) означает, что стационарное решение задачи Стефана устойчиво в смысле обычного определения устойчивости.

Список литературы

[1] *Белоносов В.С., Зеленяк Т.И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.- Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1975.–155 с.

[2] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.- М.: Наука, 1967.–736 с.

[3] *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. - М.: Наука, 1969. Т. 1. –343 с.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОДИФФУЗИОННОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Доклады АН УССР–1985б–№4

Пусть $\Omega = \{(z_1, z_2) : 0 < z_1 < 2\pi,\ -\infty < z_2 < l\}$ и $G = \Omega \times (0, T)$. При изучении нестационарной задачи кристализации при наличии примеси требуется в области G найти поверхность $z_2 = \xi(z_1, t)$ (при каждом $t \geq 0$ кривая $z_2 = \xi(z_1, t)$ делит Ω на части Ω_{1t} и Ω_{2t}, для которых $z_2 < \xi(z_1, t)$ и $z_2 > \xi(z_1, t)$) соответственно, и ее концы лежат на вертикалях $z_1 = 0$, $z_1 = 2\pi$) и функции $u_i(z, t)$, $c(z, t)$ по условиям:

$$\Delta u_1 + a\gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_2} - \beta u_1 - \gamma \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \ \text{ в } G_1(T) = \{(z, t) : z \in \Omega_{1t},\ t \in (0, T)\},$$

$$\Delta u_2 + a\gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial z_2} - \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \ \text{ в } G_2(T) = \{(z, t) : z \in \Omega_{2t},\ t \in (0, T)\},$$

$$\alpha_2 \Delta c + a \frac{\partial c}{\partial z_2} - \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \ \text{ в } G_2(T);$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\mu(a + \xi_t)}{(1 + \xi_{z_1}^2)^{1/2}}, \quad -\alpha_2 \frac{\partial c}{\partial n} = c(1 - R) \frac{a + \xi_t}{(1 + \xi_{z_1}^2)^{1/2}} \tag{1}$$

$u_1 = u_2 = qc + u_k$ при $z_2 = \xi(z_1, t)$; $\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = \frac{\partial c}{\partial z_1} = 0$ при $z_1 = 0, 2\pi$; $u_1(z_1, -\infty, t) = 0$, $u_2(z_1, l, t) = u_0$, $c(z_1, l, t) = p_0$; $u_i(z, 0) = u_{i0}(z)$, $i = 1, 2$, $c(z, 0) = c_0(z)$.

Здесь $u_i(z, t)$, $i = 1, 2-$ температура среды в твердой и жидкой фазе, $c(z, t)-$ концентрация примеси в жидкой фазе. Мы пренебрегаем диффузией примеси в твердой фазе и считаем линейной зависимость концентрации примеси от температуры на фронте кристаллизации. Все входящие в описание задачи (1) параметры считаются положительными и определяются свойствами рассматриваемой среды, граничными условиями и характером процесса кристаллизации, число $l > 0$ мы определим ниже.

Стационарное решение задачи (1) соответствует квазистационарному режиму кристаллизации, при котором фронт кристаллизации (искомая свободная граница) движется в положительном направлении оси z_2 со скоростью a.

В настоящей работе мы исследуем в линейном приближении устойчивость стационарного решения задачи (1), соответствующего плоскому фронту кристаллизации, и доказываем неединственность этого стационарного решения при некоторых ограничениях на параметры задачи.

Для дальнейшего удобно от задачи (1) в неизвестной области перейти с помощью замены переменных $y_1 = z_1$, $y_2 = l(z_2 - \xi)/(l - \xi)$ в области Ω_{2t} и $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2 - \xi$ в области Ω_{1t} к задаче в фиксированной области. Пусть $D_1 = \{(y_1, y_2) : 0 < y_1 < 2\pi,\ y_2 < 0\}$, $D_2 = \{(y_1, y_2) : 0 < y_1 < 2\pi,\ 0 < y_2 < l\}$, $D_i(T) = D_i \times (0, T)$, $D = \{y_2 : 0 < y_1 < 2\pi\}$, $D(T) = D \times (0, T)$. Тогда исходная задача описывается соотношениями:

$$L_1(u_1(y,t), \xi(y_1,t)) = \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \gamma_1 \xi_t \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \quad \text{в} \quad D_1(T),$$

$$L_2(u_2(y,t), \xi(y_1,t)) = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2 \xi_t \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \frac{y_2 - l}{l - \xi} \quad \text{в} \quad D_2(T),$$

$$L_3(c(y,t), \xi(y_1,t)) = \frac{\partial c}{\partial t} + \xi_t \frac{\partial c}{\partial y_2} \frac{y_2 - l}{l - \xi} \quad \text{в} \quad D_2(T);$$

$$L_4(u_1(y,t), u_2(y,t), \xi(y_1,t)) = \mu \xi_t,\ L_5(c(y,t), \xi(y_1,t)) = c(1-R)\xi_t,\ L_6(u_1(y,t),$$

$$u_2(y,t), c(y,t)) \equiv u_2 - qc - u_k = 0,\ L_7(u_1(y,t), u_2(y,t)) = u_1 - u_2 = 0 \quad \text{в} \quad D(T);$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2}{\partial y_1} = \frac{\partial c}{\partial y_1} = 0 \text{ при } y_1 = 0, 2\pi,\ u_i(y,0) = u_{i0}(y),\ c(y,0) = c_0(y), \tag{2}$$

где L_i, $i = 1, ..., 5$,– дифференциальные операторы, в которые переходят соответствующие операторы задачи (1) при замене переменных.

Утверждение 1. Пусть

$$\mu_1 \left(\frac{qp_0}{R} + u_k \right) - \mu_2 \left(\frac{qp_0}{R} + u_k - u_0 \right) > 0, \qquad qp_0 + u_k < u_0, \tag{3}$$

тогда существует стационарное решение задачи (2) $v_1(y)$, $v_2(y)$, $p(y)$. Границей раздела фаз является линия $y_2 = 0$ и число l находится из равенства

$$\mu_1 A - \mu_2 \frac{A - u_0}{1 - \exp(\mu_2 l)} = \mu a,$$

где $A = \frac{qp_0}{R + (1-R)\exp(\mu_3 l)} + u_k$, $\mu_1 = \frac{-a\gamma_1 + \sqrt{a^2\gamma_1^2 + 4\beta}}{2}$, $\mu_2 = -a\gamma_2$, $\mu_3 = -a/\alpha_2$.

В системе (2) сделаем замену $u_i = v_i + \varphi_i$, $c = p + p_2$, $\xi = r$, линеаризуем ее относительно функций φ_i, p_2, r на стационарном решении, а затем сделаем еще одну замену $\psi_1 = \varphi_1 - r\frac{\partial v_1}{\partial y_2}$, $\psi_2 = \varphi_2 + r\frac{y_2 - l}{l}\frac{\partial v_2}{\partial y_2}$, $q_3 = p_2 + r\frac{y_2 - l}{l}\frac{\partial p}{\partial y_2}$ и будем искать решение полученной таким образом линейной задачи в виде $\psi_i = e^{\sigma t}\bar{\psi}_i$, $q_2 = e^{\sigma t}\bar{q}_2$, $r = e^{\sigma t}\bar{r}$. Получим

$$\Delta\bar{\psi}_1 + a\gamma_1 \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial y_2} - \beta\bar{\psi}_1 = \gamma_1 \sigma \bar{\psi}_1 \ \text{ в } D_1,$$

$$\Delta\bar{\psi}_2 + a\gamma_2 \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial y_2} = \gamma_2 \sigma \bar{\psi}_2 \ \text{ в } D_2, \quad \alpha_2 \Delta \bar{q}_2 + a \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial y_2} = \sigma \bar{q}_2 \ \text{ в } D_2;$$

$$\frac{\partial \bar\psi_1}{\partial y_1}-\frac{\partial \bar\psi_2}{\partial y_2}+\bar r b=\mu\sigma\bar r,\quad -\alpha_2\frac{\partial \bar q_2}{\partial y_2}-\bar q_2(1-R)a+aR\bar r\frac{\partial p}{\partial y_2}=p(1-R)\sigma\bar r,\quad \bar\psi_1-\bar\psi_2$$

$$+\bar r\mu a=0,\quad \bar\psi_2+\bar r\frac{\partial v_2}{\partial y_2}-q\left(\bar q_2+\bar r\frac{\partial p}{\partial y_2}\right)=0\quad \text{при}\quad y_2=0;\quad \frac{\partial \bar\psi_1}{\partial y_1}=\frac{\partial \bar\psi_2}{\partial y_1}=\frac{\partial \bar q_2}{\partial y_1}=0$$

$$\text{при}\ y_1=0,2\pi;\ \bar\psi_1(y_1,-\infty)=0,\ \bar\psi_2(y_1,l)=0,\ \bar q_2(y_1,l)=0;\ b=\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 v_2}{\partial y_2^2}\ \text{при}\ y_2=0. \tag{4}$$

Спектральная задача (3) решается разложением искомых функций $\bar\psi_i$, $\bar q_2$, $\bar r$ в ряды по cos ky_1, и для нахождения собственных значений получим равенство

$$\Phi(\sigma,k,\alpha_2)\equiv\left[q\frac{(1-e^{l(\nu_{31}-\nu_{32})})\left(-aR\frac{\partial p}{\partial y_2}+p(1-R)\sigma\right)}{-\alpha_2\nu_{31}-a(1-R)-[-\alpha_2\nu_{32}-a(1-R)]e^{l(\nu_{31}-\nu_{32})}}+q\frac{\partial p}{\partial y_2}-\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right]$$

$$\times\frac{\frac{\nu_{21}}{\nu_1}-1-\left(\frac{\nu_{22}}{\nu_1}-1\right)e^{l(\nu_{21}-\nu_{22})}}{1-e^{l(\nu_{21}-\nu_{22})}}+\frac{\mu\sigma}{\nu_1}-\frac{b}{\nu_1}+\mu a=0\ \text{ при } y_2=0,\ \text{ где}$$

$$\nu_1=\frac{-a\gamma_1+\sqrt{a^2\gamma_1^2+4(\beta+\gamma_1\sigma+k^2)}}{2},\ \nu_{21,22}=\frac{-a\gamma_2\mp\sqrt{a^2\gamma_2^2+4(\gamma_2\sigma+k^2)}}{2},$$

$$\nu_{31,32}=\frac{-a\mp\sqrt{a^2+4\alpha_2(\sigma+\alpha_2k^2)}}{2\alpha_2}.$$

При сделанном предположении $q>0$ имеем $R>1$, поэтому $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\Phi(\sigma,k,\alpha_2)=+\infty$ для всех k. С другой стороны

$$\lim_{k\to+\infty}\Phi(0,k,\alpha_2)=-2\left[\frac{-qap_0(1-R)}{\alpha_2[R+(1-R)e^{l\mu_3}]}+\frac{a\gamma_2\left(u_k-u_0+\frac{qp_0}{R+(1-R)e^{l\mu_3}}\right)}{1-e^{l\mu_2}}\right]+\mu a,$$

откуда следует, что при достаточно малых α_2 и больших k $\Phi(0,k,\alpha_2)<0$. Таким образом, уравнение $\Phi(\sigma,k,\alpha_2)=0$ имеет положительное решение.

Утверждение 2. При достаточно малых значениях параметра $\alpha_2>0$ задача (4) имеет положительные собственные значения и, следовательно, указанное стационарное решение исходной задачи неустойчиво в линейном приближении.

Утверждение 3. Существуют такое достаточно большое целое число $\bar k$ и достаточно малое $\bar\alpha_2$, для которых $\Phi(0,\bar k,\bar\alpha_2)=0$.

Последнее утверждение мы используем для исследования нелинейной стационарной задачи, соответствующей нестационарной задаче (2), которую мы запишем в виде:

$$L_i(v_1+\varphi_1,v_2+\varphi_2,p+p_2,r,\alpha_2)=0,\qquad i=1,...,7; \tag{5}$$

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} = \frac{\partial p_2}{\partial y_1} = 0$ при $y_1 = 0, 2\pi$; $\varphi_1(y_1, -\infty) = 0$, $\varphi_2(y_1, l) = 0$, $p_2(y_1, l) = 0$, отмечая зависимость коэффициентво L_i от параметра α_2. Будем рассматривать φ_1 из пространства функций $C^{2+\alpha}(\bar{D}_1)$ убывающих на $-\infty$, φ_2, p_2 из пространства функций $C^{2+\alpha}(\bar{D}_2)$, равных нулю при $y_2 = l$, r из пространства $C^{2+\alpha}(\bar{D})$, считая все указанные функции четными и периодическимим с периодом 2π по переменной y_1. Пусть $w = (\varphi_1, \varphi_2, p_2, r)$– элемент банахового пространства E_1, которое есть прямая сумма указанных выше пространств. Задачу (5) перепишем в виде

$$F(w, \alpha_2) = 0, \qquad F(0, \bar{\alpha}_2) = 0, \tag{6}$$

где опрератор F определяется своими компонентами L_i. Из вида операторов L_i следует, что F есть непрерывно дифференцируемое отображение в окрестности точки $(0, \bar{\alpha}_2)$ пространства $E_1 \times \mathbb{R}^1$ в пространство E_2, которое мы определим как прямую сумму пространств $C^{\alpha}(\bar{D}_1)$, $C^{\alpha}(\bar{D}_2)$, $C^{\alpha}(\bar{D}_2)$, $C^{1+\alpha}(\bar{D})$, $C^{2+\alpha}(\bar{D})$, $C^{2+\alpha}(\bar{D})$, элементы которых четные и 2π-периодические по y_1 и убывают при $y_2 \to -\infty$.

Рассмотрим линейную задачу $-Bg = f$, где $B = -F'_w(0, \bar{\alpha}_2)$, $f \in E_2$, $f = (f_1, f_2, ..., f_7)$, для которой компоненты оператора B в терминах введенных ранее функций ψ_i, q_2, r имеют такой же вид, как левые части уравнений задачи (4) и выполнены точно такие же граничные условия при $y_1 = 0, 2\pi$ и $y_2 = l$, $y_2 = -\infty$.

Пусть $M(f)$– линейный функционал в пространстве E_2

$$M(f) \equiv f_{7\bar{k}} - \bar{\nu}_1^{-1}\left(f_{4\bar{k}} - \frac{\partial K_1 f_{1\bar{k}}}{\partial y_2}|_{y_2=0} + \frac{\partial K_2 f_{2\bar{k}}}{\partial y_2}|_{y_2=0}\right) - \frac{\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{\nu}_1} - 1 - e^{l(\bar{\nu}_{21}-\bar{\nu}_{22})}\left(\frac{\bar{\nu}_{22}}{\bar{\nu}_1} - 1\right)}{1 - e^{l(\bar{\nu}_{21}-\bar{\nu}_{22})}}$$

$$\times\left[q\frac{1 - e^{l(\bar{\nu}_{31}-\bar{\nu}_{32})}\left(f_{5\bar{k}} + \bar{\alpha}_2\frac{\partial K_3 f_{3\bar{k}}}{\partial y_2}|_{y_2=0}\right)}{-\bar{\alpha}_2\bar{\nu}_{31} - a(1-R) + (\bar{\alpha}_2\bar{\nu}_{32} + a(1-R))e^{l(\bar{\nu}_{31}-\bar{\nu}_{32})}} + f_{6\bar{k}}\right],$$

где $f_{i\bar{k}}$– коэффициент Фурье в разложении f_i по $\cos ky_1$, черта над ν_i, ν_{ij} означает, что эти коэффициенты вычислены при $\sigma = 0$, $k = \bar{k}$, и, например, $K_1 f_{1\bar{k}}$ обозначает решение краевой задачи

$$\frac{d^2\psi}{dy_2^2} + a\gamma_1\frac{d\psi}{dy_2} - \beta\psi - \bar{k}^2\psi = f_{1\bar{k}}, \quad \psi(-\infty) = \psi(0) = 0.$$

Лемма. Пусть функция $\Phi(0, k, \bar{\alpha}_2)$ обращается в нуль только при одном целом числе $\bar{k}$, тогда нуль является собственным значением оператора B и ему соответствует одномерное пространство собственных функций. Уравнение $-BG = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие $Mf = 0$, при этом $g \in E_1$ при $f \in E_2$.

Доказательство леммы состоит в явном построении решения линейной задачи в виде рядов Фурье и доказательстве принадлежности полученных рядов k соответствующим пространствам.

Таким образом, при сделанных предположениях ядро и коядро оператора B имеют размерность, равную единице. Как следует из общей теории ветвления решений нелинейных уравнений [1], появление нетривиальных решений урванения (6) связано с разрешимостью так называемого уравнения разветвления, которое в обозначениях работы [1] имеет в нашем случае вид:

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \sum_{l=1}^{\infty} L_{kl} h^l = 0, \tag{7}$$

где $h = \alpha_2 - \bar{\alpha}_2$.

Непосредственный анализ оператора F показывает, что в нашем случае все коэффициенты L_{0l} равны нулю, поэтому уравнение (7) принимает вид

$$L_{11}\zeta h + L_{20}\zeta^2 + ... = 0,$$

где многоточие заменяет члены, обязательно содержащие ζ в качестве множителя, так что после сокращения на ζ, получаем

$$L_{11}h + L_{20}\zeta + ... = 0. \tag{8}$$

По теореме о неявной функции достаточным условием разрешимости уравнения (8) есть условие $L_{11} \neq 0$, которое в терминах исходного уравнения (6) можно записать в виде [1]: $L_{11} = 2M(F_{11}\varphi_0)$, где $F_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(0,\bar{\alpha}_2)}{\partial w \partial \alpha_2}$, φ_0– собственная функция оператора B. Проведенные вычисления приводят к следующему результату: $L_{11} = \Phi_{\alpha_2}(0, \bar{k}, \bar{\alpha}_2)$.

Теорема. Пусть выполняются условия утверждения 1 и леммы, $\Phi(0, \bar{k}, \bar{\alpha}_2) = 0$, $\Phi_{\alpha_2}(0, \bar{k}, \bar{\alpha}_2) \neq 0$, тогда в некоторой окрестности точки $\bar{\alpha}_2 \in \mathbb{R}^1$ существует нетривиальные решения термодиффузионной квазистационарной задачи Стефана.

Тривиальному решению соответствует плоский фронт кристализации.

Отметим, что ранее устойчивость решений квазистационарной термодиффузионной задачи Стефана в линейном приближении в неточной постановке рассматривалась в работах [2,3] и что аналогичное стационарное решение задачи кристализации без учета примеси устойчиво в линейном приближении.

Список литературы

[1] *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие.– Успехи мат. наук, 1962, **17**, вып. 2, с. 13–75.

[2] *Mullins W.W., Sekerka R.F.* Stability of a planar interfase during soldification of a dilute binary alloy.– J. Appl. Phys., 1964, **35**, N. 2, p. 444–451.

[3] *Ockendon J.R.* Linear and nonlinear stability of a class of moving boundary problems.– In: Free boundary problems: Proc. semin. Pavia, Sept.– Oct. 1979. Roma, 1980, vol. 2, p. 443–478.

ЗАДАЧА СТЕФАНА

Доповіді АН УРСР–1986,–№11

Сучасний стан проблеми Стефана представлено в огляді [1]. Нестаціонарні багатовимірні задачі Стефана вивчались в класах гладких функцій в [2-6]. В роботах [2-4] доведено існування розв'язку в цілому по часу t однофазної задачі для рівняння теплопровідності в припущенні

$$|grad\ u_0|_{\Gamma_0} \neq 0, \tag{1}$$

де u_0– початковий розподіл температури, Γ_0– початкове положення вільної (невідомої) межі, але гладкість розв'зку встановлена при $t > 0$. В [5] за умови (1) одержана теорема існування в малому по часу для квазілінійного параболічного рівняння за допомогою деякої регуляризації умов на невідомій межі, при цьому має місце значний зазор між гладкістю розв'язку і гладкістю початкових умов. В [6] умова (1) не обов'язкова, використовується теорема Неша-Мозера про неявну функцію, так що згадуваний зазор з'являється з необхідністю. В цьому повідомленні, ініційованому обговоренням проблеми авторами [7], пропонується метод доказу існування розв'язку задачі Стефана в малому по часу при виконанні (1), котрий може бути застосований в одно- або двофазних випадках для квазілінійних параболічних рівнянь, при цьому степінь гладкості початкових умов і розв'язку збігаються. Нехай $\Omega \subset R^n$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Гельдерові простори функцій $H^l(\Omega)$, $H^{l,l/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\underset{0}{H}^{l,l/2}(\bar{\Omega}_T)$, норми $|\cdot|_{\Omega}^{(l)}$, $|\cdot|_{\Omega_T}^{(l)}$, та півнорми $\langle\cdot\rangle_{\Omega}^{(l)}$, $\langle\cdot\rangle_{\Omega_T}^{(l)}$ в них означені в [7, с. 16, 349]. Множину функцій з $H^{l,l/2}(\bar{\Omega}_T)$ ($\underset{0}{H}^{l,l/2}(\bar{\Omega}_T)$), для яких $u_t \in H^{l-1,\frac{l-1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$ ($\underset{0}{H}^{l-1,\frac{l-1}{2}}(\bar{\Omega}_T)$), позначимо $\hat{H}^{l,l/2}(\bar{\Omega}_T)$, ($\underset{0}{\hat{H}}^{l,l/2}$).

1. *Допоміжна задача з вільною межею.* Нехай $\Pi = \{(y_1,y_2):\ y_1 \in R^1,\ y_2 > 0\}$, $\Gamma t:\ \ y_2 = \xi(y_1,t)$– поверхня, така, що при кожному $t \in [0,T]$ крива $y_2 = \xi(y_1,t)$ розподіляє Π на зв'язані області G_t і G_{1t}, причому G_t містить нижню основу Π. Треба відшукати періодичні по y_1 поверхню Γ_t та функцію $u(y,t)$ в області $G(T) = \{(y,t):\ y \in G_t,\ t \in (0,T)\}$ за умовами:

$$u_t - \nabla^2 u = 0 \text{ в } G(T);\ u(y_1,0,t) = f(y_1,t) > 1,\ u(y,0) = u_0(y) \geq 1,$$

$$\xi(y_1,0) = \xi_0(y_1) > 0;\quad u = 1,\quad (\nabla u, n) + \mu\xi_t(1+\xi_{y_1}^2)^{-1/2} = 0 \text{ на } \Gamma(T), \tag{2}$$

де $\Gamma(T) = \{(y,t):\ y_2 = \xi(y_1,t),\ t \in (0,T)\}$, $\mu > 0$– стала, $u_0(y)$, $\xi_0(y_1)$– періодичні по y_1 функції, $u_0(y) > 1$ в G_0, n– одинична зовнішня нормаль до G_t. Для означеності розглянемо задачу при $y_1 \in (-1,1)$ з періодом рівним 2.

При заміні змінних $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2/\xi(y_1,t)$ образом $G(T)$ є область $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = \{x:\ x_1 \in (-1,1),\ x_2 \in (0,1)\}$, і образом $\Gamma(T)-\ \gamma_T = \gamma \times (0,T)$, $\gamma = \{x:\ x_1 \in (-1,1),\ x_2 = 1\}$. У нових змінних (2) зводиться до задачі відшукання функцій $v(x,t) = u(y(x,t),t)\xi(x_1,t)$, визначених в фіксованих областях, за умовами:

$$v_t + (h_\xi, \nabla v) - \nabla_\xi^2 v = 0 \text{ в } \Omega_T;\ v(x_1,0,t) = f(x_1,t),\ v(x,0) = w(x),$$

$$\xi(x_1,0) = \xi_0(x_1);\ v = 1,\ (\nabla_\xi v, n_\xi) + \mu\xi_t = 0 \text{ на } \gamma_T, \tag{3}$$

$$\text{де } \nabla_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\xi_{x_1}}{\xi}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad h_\xi = \left(0, -x_2\frac{\xi_t}{\xi}\right),$$

$$n_\xi = (-\xi_{x_1}, 1),\ w(x) \in H^{3+\alpha}(\bar\Omega),\ \frac{\partial w}{\partial x_2} < 0,\ \xi_0(x_1) \in H^{3+\alpha}(\bar\gamma),$$

$$f(x_1,t) \in H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\bar D_T),\ D = \{x:\ x_1 \in (-1,1),\ x_2 = 0\}.$$

Всі задані та шукані функції періодичні по x_1, гладкість початкових умов у задачах (2) та (3) збігається.

Теорема 1. Нехай в задачі Стефана (3) виконуються умови погодження. Тоді знайдеться $T_0 > 0$, залежне від даних задачі, таке, що існує розв'язок $v(x,t) \in H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\bar\Omega_T)$, $\xi(x_1,t) \in \hat H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\bar\gamma_T)$ для кожного $T \in (0,T_0)$.

Доведення розбивається на два етапи. Спочатку доводиться існування розв'язку $v(x,t) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar\Omega_T)$, $\xi(x_1,t) \in \hat H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar\gamma_T)$, а потім установлюється, що в дійсності цей розв'язок має більш високу гладкість.

Нехай функції $w_1(x,t) \in H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\bar\Omega_T)$, $\xi(x_1,t) \in H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\bar\gamma_T)$ такі, що $w_1 = 1$ на γ_T, $w_1 = f(x_1,t)$ на D_T, $w_1(x,0) = w(x)$, $\frac{\partial w_1}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)$, $\xi_1(x_1,0) = \xi_0(x_1)$, $\frac{\partial \xi_1}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,0)$. Функції $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)$, $\frac{\partial \xi}{\partial t}(x_1,0)$ будуються за початковими умовами, а w_1, ξ_1– так, як в [7, гл.4]. Розв'язок задачі (3) будемо шукати у вигляді

$$\xi(x_1,t) = \xi_1(x_1,t) + s(x_1,t),\quad v(x,t) = w(x,t) + \frac{\partial w_1}{\partial x_2}x_2\frac{s}{\xi_1} + \theta(x,t). \tag{4}$$

Нехай $\underset{0}{\overset{0}{\mathcal{H}}}{}^{2+\alpha}(\bar\Omega_T)$– звуження на [-1,1] періодичних по x_1 функцій із $\underset{0}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$, для яких $\theta(x_1,0,t) = 0$, $\underset{0}{\hat{\mathcal{H}}}{}^{2+\alpha}(\bar\gamma_T)$– звуження на [-1,1] періодичних по x_1 функцій із $\underset{0}{\hat H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$, $\mathcal{H}_1 = \underset{0}{\overset{0}{\mathcal{H}}}{}^{2+\alpha}(\bar\Omega_T) \times \underset{0}{\hat{\mathcal{H}}}{}^{2+\alpha}(\bar\gamma_T)$– простір елементів $\psi = (\theta, s)$ з нормою: $\|\psi\|_{\mathcal{H}_1} = \|\theta\|_{\Omega_T}^{2+\alpha} + \|s\|_{\gamma_T}^{2+\alpha} + \|s_t\|_{\gamma_T}^{1+\alpha}$. Впровадимо простір $\mathcal{H}_2 = \underset{0}{\mathcal{H}}{}^{\alpha}(\bar\Omega_T) \times \underset{0}{\mathcal{H}}{}^{1+\alpha}(\bar\gamma_T) \times \underset{0}{\mathcal{H}}{}^{2+\alpha}(\bar\gamma_T)$ з елементами $h = (f_1, f_0, f_2)$ і нормою, яка дорівнює сумі норм компонент h, де $\underset{0}{\mathcal{H}}{}^{l}$– відповідні звуження просторів періодичних функцій.

Розвиваючи рівності в (3) після підстановки (4) по степенях (θ, s) та їх похідних, одержимо
$$A\psi = z(x,t) + \mathcal{F}(\psi), \quad \psi \in \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{F}(\psi), \ z \in \mathcal{H}_2, \tag{5}$$
де $A \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$, розкладання $\mathcal{F}(\psi)$ по ψ починається з членів другого порядку, вектор $z(x,t)$ будується тільки за початковими умовами. Розглянемо лінійну задачу
$$A\psi = h, \quad \psi \in \mathcal{H}_1, \quad h \in \mathcal{H}_2, \tag{6}$$
яка в більш детальній формі запису має вигляд
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \sum a_{ij}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j} + \sum a_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + c_1\frac{\partial s}{\partial x_1} + c_2 s = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega_T;$$
$$\mu\frac{\partial s}{\partial t} + \sum b_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \mu_1\frac{\partial s}{\partial x_1} + \mu_2 s = f_0, \quad \theta - d_2 s = f_2 \text{ на } \gamma_T, \tag{7}$$
де коефіцієнти знаходяться по функціях w_1 та ξ_1. Обернений оператор A^{-1} в задачі (6) будується за допомогою розбиття одиниці в Ω та побудови регуляризатора по деякій сукупності модельних задач, які фактично одержуються із (7) утриманням старших членів і заморожуванням коефіцієнтів в деякій точці $x^{(k)} \in \bar{\Omega}$, $t = 0$ (див. [7], гл. 4). Центральною є модельна задача вигляду
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \sum \bar{a}_{ij}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j} = f_1 \text{ в } \bar{R}^2_T; \quad \mu\frac{\partial s}{\partial t} + \sum \bar{b}_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \bar{\mu}_1\frac{\partial s}{\partial x_1} = f_0,$$
$$\theta - \bar{d}_2 s = f_2 \text{ на } R^1_T; \ (f_1, f_0, f_2) \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{R}^2_T) \times \underset{0}{H}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^1_T) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(R^1_T),$$
$$(\theta, s) \in \underset{0}{H}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar{R}^2_T) \times \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(R^1_T), \tag{8}$$
де $\bar{R}^2 = \{x : x_2 < 0\}$, $\bar{a}_{ij} = a_{ij}(x_1^{(k)}, 1, 0)$, $\bar{b}_i = b_i(x_1^{(k)}, 0)$ тощо, $x_1^{(k)} \in [-1, 1]$.

Лема 1. Задача (8) розв'язувана у вказаних класах для довільного $T > 0$. Для розв'язку виконується нерівність
$$\langle\theta\rangle^{(2+\alpha)}_{\bar{R}^2_T} + \langle s\rangle^{(2+\alpha)}_{R^1_T} + \langle s_t\rangle^{(1+\alpha)}_{R^1_T} \le c(T)[\langle f_1\rangle^{(\alpha)}_{\bar{R}^2_T} + \langle f_0\rangle^{(1+\alpha)}_{R^1_T} + \langle f_2\rangle^{(2+\alpha)}_{R^1_T}], \tag{9}$$
де $c(T)$ залишається обмеженою при $T \to 0$.

Доведення леми полягає в безпосередній побудові розв'язку за допомогою інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Маємо (тут використовується умова (1))
$$\tilde{s}(\lambda, p) = \tilde{\varphi}(\lambda, p)\tilde{K}(\lambda, p), \quad \tilde{K}(\lambda, p) = [cp + \sqrt{p + \delta^2\lambda^2} + i\lambda\delta_1]^{-1},$$

де $\varphi(x_1,t) \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^1_T)$, $c>0$, δ, δ_1– дійсні, постійні, функція $\tilde{K}(\lambda,p)$ має прообраз

$$K(x_1,t)=\frac{1}{4c|\delta|\pi}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-(4\delta^2u)^{-1}\left(x_1-\delta_1\frac{t-u}{c}\right)^2\right]d_1(q)du,$$

$$d_1(q)=\frac{d}{dq}e^{-\frac{q^2}{2}},\quad q=\frac{t-u}{c\sqrt{2u}}. \tag{10}$$

Із зображення (10) випливає оцінка $|D^{m_1}_{x_1}D^{m_2}_t K(x_1,t)| \le c(t)(x_1^2+t^2)^{-\frac{1+m_1+m_2}{2}}$, де $c(t)$ залишається обмеженою при $t\to 0$. Нерівність (9) одержується безпосередньо із зображення $s(x_1,t)$ у вигляді згортки і оцінки розв'язку рівняння теплопровідності в напівпросторі (див. [7], гл. 4). Аналогічна модельна задача раніше розглядалася у [8].

Лема 2. Лінійна задача (6) має єдиний розв'язок при $T\le T_0$, де T_0 залежить від даних задачі і не залежить від h. Для розв'язку виконується нерівність

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_1}\le c\|h\|_{\mathcal{H}_2} \tag{11}$$

з деякою сталою c.

Нелінійну задачу (5) можна записати у вигляді $\psi=H(\psi)\equiv A^{-1}z+A^{-1}\mathcal{F}(\psi)$ і показати за допомогою (11), що в деякій кулі $B_r\subset\mathcal{H}_1$ з центром у нулі оператор H задовольняє умови принципу стиснених відображень внаслідок більш високої гладкості елемента z (тут це істотно) та мализни r і T.

Лема 3. Нехай в задачі Стефана виконуються умови погодження. Тоді знайдеться $T_0>0$, залежне від даних задачі, таке, що для всякого $T\in(0,T_0)$ існує розв'язок $v(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, $\xi(x_1,t)\in\hat{H}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar{\gamma}_T)$.

Щоб закінчити доведення теореми 1, треба здиференціювати по x_1 співвідношення в (3), що перетворює їх в лінійні співвідношення відносно старших похідних функцій $\frac{\partial v}{\partial x_1}(x,t)$, $\frac{\partial \xi}{\partial x_1}(x_1,t)$. Для цих функцій одержуємо лінійну задачу вигляду (6), для якої вірне твердження леми 2. Звідси випливає гладкість v, ξ, яка вимагається.

2. Легко бачити, що теорема 1 залишається справедливою в багатовимірному випадку, крім того розв'язок задачі (3) належить класам $H^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}$, якщо початкові умови обираються з класу $H^{l+\alpha}$ при $l\ge 3$.

Подальше узагальнення полягає в переносі теореми 1 на випадок областей загального вигляду, в котрих розглядається задача Стефана. Нехай Ω_0– задана область в R^3, $\partial\Omega_0=\Gamma\cup\Gamma_0$, причому Γ розташоване всередині обмеженої області з межею Γ_0; Γ, $\Gamma_0\in H^{l+\alpha}$, $l\ge 3$. Нехай (ω_1,ω_2)– деякі координати на Γ_{0T}, $n(\omega)$– зовнішня до Ω_0 одинична нормаль на Γ_0, $\rho(\omega,t)$– деяка функція на Γ_{0T}, $\rho(\omega,0)=0$. Нехай $Q_{\rho,T}$– область, обмежена площинами $t=0$, $t=T$ і поверхнями $\Gamma_{\rho,T}=\{(y,t):y=\omega+\rho(\omega,t)n(\omega),\ \omega\in\Gamma_0,\ t\in[0,T]\}$ і Γ_T. Однофазна задача Стефана полягає у відшуканні функцій $u(y,t)$, $\rho(\omega,t)$, за умовами

$$u_t-\nabla^2u=0 \text{ в } Q_{\rho,T}; \quad u(y,0)=u_0(y), \quad u=b(y,t) \text{ на } \Gamma_T;$$
$$u=1, \quad \mu\cos(\vec{N},t)-\sum_{k=1}^{3}\cos(\vec{N},y_k)u_{y_k}=0 \text{ на}\Gamma_{\rho,T}, \tag{12}$$

де $\vec{N}=\vec{N}(\omega,t)$– нормаль до $\Gamma_{\rho,T}$, $u_0(y)\in H^{l+\alpha}(\bar{\Omega}_0)$, $b(y,t)\in H^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\bar{\Gamma}_T)$.

Вказана парметризація вільної межі $\Gamma_{\rho,T}$ дозволяє привести задачу (12) до задачі у фіксованій області (див. [6] і тими ж методами, які використовувалися при вивченні допоміжної задачі, у припущенні (1) довести існування розв'язку в малому по t; при цьому встановлюється, що $\rho(\omega,t)\in\hat{H}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$. Нехай $y_0\in\Gamma_0$, $y'=(y_1,y_2)$ і (y',y_3)– система координат, у якій y_3 спрямовано вздовж $n(y_0)$. У координатах (y',y_3) вільна межа знайденого розв'язку може бути зображена у вигляді $y_3=\xi(y',t)$ $\in\hat{H}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$, оскільки $l\geq 3$. Зсувом цієї системи координат можна досягти нерівності $\xi(y',t)\geq a_0=const>0$ в деякому околі $y'=0$. Можна вважати, що вихідна система координат задовольняє ці умови. Нехай $\mathfrak{U}=\{(y,t):-b_0\leq y_1,\ y_2\leq b_0,\ y_3>0,t>0\}$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{U}\cap Q_{\rho,T}$, де b_0– достатньо мале. В області $\mathfrak{B}$ функції $u(y,t)$, $\xi(y',t)$ задовольняють диференціальні умови з (2), причому початкові значення $u(y,0)$, $\xi(y',0)$ належать класам $H^{l+\alpha}$. Виконуючи заміну змінних $x'=y'$, $x_3=y_3/\xi(y',t)$ і діючи далі так, як при дослідженні допоміжної задачі, для відповідних функцій $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial\xi}{\partial x_i}$, $i=1,2$, помножених на деяке зрізання $\eta(x)\in C^\infty$, одержимо задачу вигляду (6). Застосування леми 2 дає тоді, що $u(y,t)$, $\xi(y',t)$ є функціями класів $H^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}$, $\hat{H}^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}$ відповідно. При більш гладких початкових умовах процес підвищення гладкості можна продовжити.

Теорема 2. Нехай для задачі Стефана (12) виконуються умова (1) і умови погодження необхідного порядку. Тоді знайдеться T_0, що залежить від даних задачі таке, що для всякого $T\in(0,T_0)$ існує розв'язку цієї задачі, для якого $\Gamma_{\rho,T}$ є многовидом класу $\hat{H}^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}$, $u(y,t)\in H^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\bar{Q}_{\rho,T})$.

Аналогічне твердження справедливе для двофазної задачі Стефана, при вивченні якої неістотно змінюється модельна задача (8), а всі останні міркування повторюються майже дослівно. Оскільки основні труднощі в запропонованому методі пов'язані з вивченням лінеаризованої задачі, то перенесення результатів на випадок квазілінійних параболічних рівнянь теж не викликає труднощів.

Література

[1] *Данилюк И.И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук.– 1985.– **40**, вып. 5.– С. 133–185.

[2] *Friedman A., Kinderlehrer D.* A one-phase Stefan problem // Indiana Univ. Math. J.,– 1975.– **24**, N. 11.– P. 1005–1035.

[3] *Kinderlehrer D., Nirenberg L.* The smoothness of free boundary in the one-phase Stefan problem // Comm. Pure Appl. Math.– 1978.– **31**.– P. 257–282.

[4] *Caffarelli L.A.* Some aspects of one-phase Stefan problem // Indiana Univ. Math. J., 1978.– **27**.– P. 73–77.

[5] *Мейрманов А.М.* О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений // Мат. сборник.– 1980.– № 2.– С. 170–192.

[6] *Hanzawa E.I.* Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J.– 1981.– **33**.– P. 297–335.

[7] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука, 1967.– 736 с.

[8] *Базалий Б.В.* Исследование двухфазной задачи Стефана в окрестности стационарного решения // Докл. АН УССР Сер. А,– 1983.– № 12.– С. 3–7.

СТАЦИОНАРНАЯ ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА С КОНВЕКТИВНЫМ ТЕПЛОПЕРЕНОСОМ В ЖИДКОЙ ФАЗЕ

*Математическая физика и нелинейная механика–1986,–**5** №39*

Рассматривается задача кристаллизации в предположении, что в жидкой фазе движения моделируется течением равномерно завихренной жидкости. В ограниченной области $\Omega \subset R^2$ требуется найти кривую $\tilde{\gamma}$, разбивающую Ω на части $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$, функции $u_i(x)$, определенные в $\tilde{\Omega}_i$, функцию $\psi(x)$ в $\tilde{\Omega}_2$ по условиям:

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{в} \;\; \tilde{\Omega}_1,$$

$$\Delta u_2 = \psi_{x_2} u_{2x_1} - \psi_{x_1} u_{2x_2}, \quad \Delta\psi = \mu \;\; \text{в} \;\; \tilde{\Omega}_2,$$
$$u_i = \varphi_i(x) \;\; \text{при} \;\; x \in \partial\tilde{\Omega}_i \setminus \tilde{\gamma}, \quad \psi = 0 \;\; \text{при} \;\; x \in \partial\tilde{\Omega}_2,$$
$$u_i = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \;\; x \in \tilde{\gamma}. \tag{1}$$

Здесь ψ– функция тока; μ– параметр, характеризующий степень завихренности движения в жидкой фазе; n– внешняя к $\tilde{\Omega}_1$ нормаль. Относительно Ω будем предполагать, что она ограничена поверхностью класса C^3_α, такой же гладкостью должны обладать функции $\varphi_i(x)$ и составленная из них функция $\varphi(x)$, равная $\varphi_1(x)$ при $x \in \partial\tilde{\Omega}_1 \setminus \tilde{\gamma}$ и $\varphi_2(x)$ при при $x \in \partial\tilde{\Omega}_2 \setminus \tilde{\gamma}$, причем $\varphi(x)$ обращается в нуль в двух точках A_i границы Ω, $\varphi_1(x) \le 0$, $\varphi_2(x) \ge 0$.

Решение задачи (1), соответствующее $\mu = 0$, будем называть тривиальным. Докажем возможность продолжения тривиального решения по μ при малых значениях этого параметра.

Тривиальное решение описывается соотношениями $\Delta w = 0$ в Ω, $w = \varphi$ на $\partial\Omega$, $\psi = 0$, кривая γ является линией уровня: $w = 0$ и делит Ω на Ω_1, в которой $w \le 0$, и Ω_2, в которй $w \ge 0$. Будем обозначать $w_1 = w|_{\Omega_1}$, $w_2 = w|_{\Omega_2}$. Предположим, что γ образует с $\partial\Omega$ ненулевые углы в точках A_i, что легко можно выразить в терминах функции $\varphi(x)$. При сделанных предположениях относительно гладкости $\varphi(x)$ и $\partial\Omega$ функция $w \in C^3_\alpha$. Предположим также, что $|\nabla w| \ne 0$ на $\bar{\gamma}$.

В областях Ω_1, Ω_2 введем новые переменные (y_1, y_2), связанные со старыми (x_1, x_2) тождественным преобразованием. Пусть Ω_1, Ω_2 отображаются на $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$ соответственно по закону

$$x_1 = y_1 + f_i(y_1, y_2), \quad x_2 = y_2 + g_i(y_1, y_2), \tag{2}$$

так что γ отображается на $\tilde{\gamma}$ и $\partial\Omega$– на себя тождественно, и, кроме того, $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$ на γ. Отсюда следует, что $f_i = g_i = 0$ на $\partial\Omega$. Если известны значения $f_i = \bar{f}_i(y)$, $g_i = \bar{g}_i(y)$ на γ, причем $\bar{f}_i(A_j) = \bar{g}_i(A_j)$, $i, j = 1, 2$, то $\bar{f}_i(y)$, $\bar{g}_i(y)$ можно продолжить в Ω_i следующим образом. Достаточно это продолжение построить в окрестности произвольной точки γ. В окрестности данной точки введем локальную систему координат (z_1, z_2), в которой уравнение куска γ имеет вид $z_2 = 0$ (если в качестве такой точки выбрана A_i, то для точек γ имеем также $z_1 \leq 0$). Пусть $\zeta(z_2)$– бесконечно дифференцируемая функция с достаточно малым носителем, содержащим нуль и $\zeta(0) = 1$. Рассмотрим функции $\bar{f}_i(y(z))\cdot\, \zeta(z_2) = f(z_1, z_2)$, $\bar{g}_i(y(z)) \times\zeta(z_2) = g(z_1, z_2)$. Возвращаясь к прежним переменным (y_1, y_2) и склеивая функции $f(z_1, z_2)$, $g(z_1, z_2)$ с помощью разбиения единицы в области Ω, получаем функции $f_i(y)$, $g_i(y)$, определенные в $\bar{\Omega}_i$, причем они совпадают с заданными на γ и равны нулю на остальной части границы Ω_i. Свойства гладкости полученных таким образом $f_i(y)$, $g_i(y)$ определяются свойствами гладкости $\bar{f}_i$, $\bar{g}_i$, γ и $\partial\Omega$.

От задачи (1) со свободной (неизвестной) границей перейдем с помощью замены (2) к задаче в фиксированной области в переменных (y_1, y_2) и, кроме того, введем функции $v_i = u_i - w_i$. Тогда для определения функций $v_i(y)$, $\psi(y)$, $f_i(y)$, $g_i(y)$ получим краевую нелинейную задачу сопряжения

$$
\begin{gathered}
L_1(v_1, f_1, g_1) = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \\
L_2(v_2, f_2, g_2, \psi) = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \\
L_3(\psi, f_2, g_2, \mu) = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \\
L_0(v_1, v_2, f_1, g_1, f_2, g_2) = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad v_1|_\gamma = v_2|_\gamma = 0, \\
v_1 = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_1 \setminus \gamma, \ v_2 = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_2 \setminus \gamma, \quad \psi = 0 \text{ на } \ \partial\Omega_2, \qquad (3)
\end{gathered}
$$

где L_i, $i = 1, 2, 3$– некоторые дифференциальные операторы второго порядка, L_0– дифференциальный оператор первого порядка. Очевидно, что при $\mu = 0$ задача (3) имеет нулевое решение $v_i = f_i = g_i = \psi = 0$.

На множествах Ω_i введем функциональные пространства $\Lambda^k_\alpha(\Omega_i)$, норма в которых вводится следующим образом:

$$
\|v\|_{\Lambda^k_\alpha(\Omega_i)} = \sum_{|\xi|\leq k} \sup_{\Omega_i}(\rho^{|\xi|-k-\alpha}|D^\xi_y v|) + \sum_{|\xi|=k} \sup_{y_1, y_2\in\Omega_i} \frac{|D^\xi_y v(y_1) - D^\xi_y v(y_2)|}{|y_1 - y_2|^\alpha}, \qquad (4)
$$

где ρ– сумма расстояний от (y_1, y_2) до точек A_i.

Аналогично вводится пространство $\Lambda^k_\alpha(\gamma)$. Используя явный вид операторов L_i и свойства функции $w(y)$, легко проверить, что оператор, задаваемый левыми частями задачи (3), переводит элемент $\kappa = ((v_1, v_2, f_1, g_1, f_2, g_2, \psi), \mu)$ такой, что v_1, f_1, $g_1 \in \Lambda^2_\alpha(\Omega_1)$, v_2, f_2, $g_2 \in \Lambda^2_\alpha(\Omega_2)$, $\rho^\alpha\psi \in \Lambda^2_\alpha(\Omega_2)$, $\mu \in R^1$, в элемент $F = (F_1, F_2, F_3, F_0)$, для которого $F_1 \in \Lambda^0_\alpha(\Omega_1)$, $F_2 \in \Lambda^0_\alpha(\Omega_2)$, $\rho^\alpha F_3 \in \Lambda^0_\alpha(\Omega_2)$, $F_0 \in \Lambda^1_\alpha(\gamma)$, причем это отображение непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $((0), 0)$. Для доказательства возможности продолжения нулевого решения задачи (3) по μ покажем, что оператор линейной задачи, полученной линеаризацией нелинейной задачи (3) на нулевом решении, имеет ограниченный обратный оператор и воспользуемся теоремой о неявной функции в функциоанальных пространствах.

Линейная задача формулируется следующим образом. При заданых F_i из соответствующих пространств требуется определить функции u_i, f_i, g_i, ψ из условий

$$\Delta u_1 = F_1 \text{ в } \Omega_1,\ \Delta u_2 = \psi_{y_2} w_{y_1} - \psi_{y_1} w_{y_2} + F_2 \text{ в } \Omega_2,$$

$$\Delta \psi = F_3 \text{ в } \Omega_2,\ \psi = 0 \text{ на } \partial\Omega_2,$$

$$u_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1 \setminus \gamma,\quad u_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega_2 \setminus \gamma,$$

$$u_1 = u_2 = -\frac{\partial w_1}{\partial y_1} f_1 - \frac{\partial w_1}{\partial y_2} g_1 = -\frac{\partial w_2}{\partial y_1} f_2 - \frac{\partial w_2}{\partial y_2} g_2 \text{ на } \gamma,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = F_0 \text{ на } \gamma. \tag{5}$$

Эта задача, как легко видеть, распадается на задачу Дирихле для функции $\psi(y)$:

$$\Delta \psi = F_3 \text{ в } \Omega_2,\quad \psi = 0 \text{ на } \partial\Omega_2, \tag{6}$$

и задачу сопряжения для функций $u_i(y)$:

$$\Delta u_1 = F_1 \text{ в } \Omega_1,\ \Delta u_2 = \bar{F}_2 \equiv \psi_{y_2} w_{y_1} - \psi_{y_1} w_{y_2} + F_2 \text{ в } \Omega_2,$$

$$u_1 = u_2,\quad \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = F_0 \text{ на } \gamma. \tag{7}$$

Решая последнюю задачу, определяем величину $\frac{\partial w_i}{\partial y_1} f_i + \frac{\partial w_i}{\partial y_2} g_i$ на γ и для устранения оставшегося произвола в выборе функций $f_i(y)$, $g_i(y)$ требуем, например, чтобы выполнялось соотношение

$$-\frac{\partial w_i}{\partial y_2} f_i + \frac{\partial w_i}{\partial y_1} g_i = 0. \tag{8}$$

Тогда сможем найти f_i, g_i на γ и указанным выше способом продолжить их в области Ω_i с сохранением класса.

При $\rho^\alpha F_3 \in \Lambda^0_\alpha(\Omega_2)$ задача (6) однозначно разрешима в классе функций, для которых $\rho^\alpha \psi \in \Lambda^2_\alpha(\Omega_2)$, и выполняется оценка $\|\rho^\alpha \psi\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_2)} \le c \|\rho^\alpha F_3\|_{\Lambda^0_\alpha(\Omega_2)}$. При этом $\bar{F}_2 \in \Lambda^0_\alpha(\Omega_2)$ [2,3].

Для задачи (7), используя свойства потенциала простого слоя, распространенного вдоль дуги γ с плотностью F_0, и результаты исследования задачи дифракции [2], можно утверждать, что она однозначно разрешима при любых правых частях $F_i \in \Lambda^0_\alpha(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, $F_0 \in \Lambda^1_\alpha(\gamma)$, и функция $u(y)$, равная $u_1(y)$ в Ω_1 и $u_2(y)$ в

Ω_2, принадлежит классам $C^0_\alpha(\bar\Omega)$ и $C^2_\alpha(\hat\Omega_i)$, где $\hat\Omega_i$ получается из Ω_i выбрасыванием окрестностей точек A_i.

Для получения оценки решения задачи линейного сопряжения в точках пересечения γ с $\partial\Omega$ применим работы [1,3]. При этом изучим модельную задачу в L_2 пространствах.

Модельная задача в точках A_i состоит в следующем. Пусть полуплоскость $z_1 \le 0$ плоскости (z_1, z_2) бесконечным лучом l, образующим угол ω_0 с осью z_1, делится на части G_1 и G_2. Требуется найти функции $v_1(z)$, $v_2(z)$, $s(z_1)$ такие, чтобы

$$\Delta v_i = F_i \quad \text{в} \ \ \Omega_i, \quad v_i = 0 \ \text{ при } \ z_1 = 0,$$
$$v_1 - v_2 = 0, \quad v_1 = s, \quad \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = F_0 \ \text{ на } \ l. \tag{9}$$

В задаче (9) перейдем к полярной системе координат (r, ω), а затем сделаем замену $r = e^{-\tau}$. В переменных (τ, ω) получим

$$\Delta v_1 = e^{-2\tau} F_1 \equiv \mathfrak{F}_1 \ \text{ в } \ D_1 = \{(\tau, \omega): \ \tau \in R^1, \ \omega \in (0, \omega_0)\},$$
$$\Delta v_2 = e^{-2\tau} F_2 \equiv \mathfrak{F}_2 \ \text{ в } \ D_2 = \{(\tau, \omega): \ \tau \in R^1, \ \omega \in (\omega_0, \pi)\},$$
$$v_1 = 0 \quad \text{при} \ \ \omega = 0, \ \ v_2 = 0 \ \text{ при } \ \omega = \pi,$$
$$v_1 = v_2, \ \ v_1 = s, \ \ \frac{\partial v_1}{\partial \omega} - \frac{\partial v_2}{\partial \omega} = e^{-\tau} F_0 \equiv \mathfrak{F}_0 \ \text{ при } \ \omega = \omega_0. \tag{10}$$

Преобразование Фурье по переменной τ приводит к соотношениям

$$\frac{d^2 \tilde v_i}{d\omega^2} - \lambda^2 \tilde v_i = \tilde{\mathfrak{F}}_i \ \text{ в } \ D_i,$$
$$\tilde v_1|_{\omega=0} = \tilde v_2|_{\omega=\pi} = 0, \ \ \tilde v_1|_{\omega=\omega_0} = \tilde v_2|_{\omega=\omega_0} = \tilde s,$$
$$\frac{d\tilde v_1}{d\omega} - \frac{d\tilde v_2}{d\omega} = \tilde{\mathfrak{F}}_0 \ \text{ при } \ \omega = \omega_0. \tag{11}$$

Однородная задача (11) имеет нетривиальные решения $\sin n\omega$ и ее собственными числами являются $\lambda = in$, $n = 1, 2, ...$ Пусть $R_i(\lambda)-$ обратный оператор в задаче $\frac{d^2\tilde v_i}{d\omega^2} - \lambda^2 \tilde v_i = \tilde{\mathfrak{F}}_i$ в D_i с нулевыми граничными условиями на ∂D_i, и пусть $\tilde v_i = \tilde u_i + R_i(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda)$. Для $\tilde u_i$, $\tilde s$ получим задачу

$$\frac{d^2 \tilde u_i}{d\omega^2} - \lambda^2 \tilde u_i = 0, \qquad \tilde u_1|_{\omega=0} = \tilde u_2|_{\omega=\pi} = 0,$$
$$\tilde u_1|_{\omega=\omega_0} = \tilde u_2|_{\omega=\omega_0} = \tilde s, \qquad \frac{d\tilde u_1}{d\omega} - \frac{d\tilde u_2}{d\omega} = \tilde f(\lambda) \equiv$$
$$\equiv \tilde{\mathfrak{F}}_0 - \frac{\partial}{\partial\omega} R_1(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}_1(\lambda) + \frac{\partial}{\partial\omega} R_2(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}_2(\lambda) \ \text{ при } \ \omega = \omega_0.$$

Решение этой задачи выписывается явно:

$$\tilde{u}_1 = \frac{\sinh \lambda\omega \sinh \lambda(\pi - \omega_0)}{\lambda \sinh \lambda\pi} \tilde{f}(\lambda) \equiv Q_1(\lambda)\tilde{f}(\lambda),$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{\sinh \lambda\omega_0 \sinh \lambda(\pi - \omega)}{\lambda \sinh \lambda\pi} \tilde{f}(\lambda) \equiv Q_2(\lambda)\tilde{f}(\lambda),$$

$$\tilde{s} = \frac{\sinh \lambda\omega_0 \sinh \lambda(\pi - \omega_0)}{\lambda \sinh \lambda\pi} \tilde{f}(\lambda) \equiv R_3(\lambda)\tilde{f}(\lambda), \tag{12}$$

так что для задачи (10) имеем

$$\tilde{v}_i = Q_i(\lambda)\tilde{f}(\lambda) + R_i(\lambda)\tilde{F}_i(\lambda), \quad \tilde{s}(\lambda) = R_3(\lambda)\tilde{f}(\lambda).$$

Операторы $R_i(\lambda)$, $i = 1,2,3$, имеют особенности при $\lambda = i\frac{\pi n}{\omega_0}$, $\lambda = i\frac{\pi n}{\pi - \omega_0}$, $\lambda = in$, операторы $Q_i(\lambda)$– при $\lambda = in$, $n = \pm 1, \pm 2, ...$

Из решения (12) непосредственно получим

$$|\lambda|^4(\|\tilde{u}_1\|^2_{L_2(0,\omega_0)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{L_2(\omega_0,\pi)}) + \|\tilde{u}_1\|^2_{W^2_2(0,\omega_0)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{W^2_2(\omega_0,\pi)} \le c(1 + |\lambda|)|\tilde{f}(\lambda)|^2.$$

Для функций $R_i(\lambda)\tilde{F}_i(\lambda)$ такого вида оценка известна. Таким образом,

$$|\lambda|^4\|\tilde{v}_i\|^2_{L_2} + \|\tilde{v}_i\|^2_{W^2_2} \le c[(1 + |\lambda|)|\tilde{f}(\lambda)|^2 + \|\tilde{\mathfrak{F}}_i\|^2_{L_2}],$$

$$(1 + |\lambda|^3)|\tilde{s}|^2 \le c(1 + |\lambda|)|\tilde{f}(\lambda)|^2.$$

Пусть $m_1(\tau) = \frac{\partial}{\partial\omega}\mathfrak{F}^{-1}(R_1(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}_1(\lambda))|_{\omega=\omega_0}$, где $\mathfrak{F}^{-1}$– обратное преобразование Фурье. Тогда, как известно, $m_1(\tau) \in W_2^{1/2}(R^1)$ при $\mathfrak{F}_1(\tau,\omega) \in L_2(D_1)$ и $\|m_1\|_{W_2^{1/2}(R^1)} \le c\|\mathfrak{F}_1\|_{L_2(D_1)}$. Поэтому из равенства Парсеваля имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1 + |\lambda|)|\tilde{m}_1(\lambda)|^2 d\lambda \le c\int_{-\infty}^{\infty}\|\tilde{\mathfrak{F}}_1(\lambda)\|^2_{L_2(0,\omega_0)}d\lambda.$$

Заметим, что $\tilde{m}_1(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\omega}R_1(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}_1(\lambda)|_{\omega=\omega_0}$. Аналогичное неравенство выполняется для $\tilde{m}_2(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\omega}R_2(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}_2(\lambda)|_{\omega=\omega_0}$. Используя это замечание для оценки $\tilde{f}(\lambda)$, получаем

$$|\lambda|^4(\|\tilde{v}_1\|^2_{L_2(0,\omega_0)} + \|\tilde{v}_2\|^2_{L_2(\omega_0,\pi)}) + \|\tilde{v}_1\|^2_{W^2_2(0,\omega_0)} + \|\tilde{v}_2\|^2_{W^2_2(\omega_0,\pi)} + (1 + |\lambda|^3)|\tilde{s}|^2$$

$$\le c[(1 + |\lambda|)(|\tilde{\mathfrak{F}}_0(\lambda)|^2 + |\tilde{m}_1(\lambda)|^2 + |\tilde{m}_2(\lambda)|^2) + \|\tilde{\mathfrak{F}}_1\|^2_{L_2(0,\omega_0)} + \|\tilde{\mathfrak{F}}_2\|^2_{L_2(\omega_0,\pi)}]. \tag{13}$$

Неравенство (13) справедливо для тех λ, для которых $Im\ \lambda$ не совпадает ни с одним из чисел множества $N = \left\{\frac{\pi n}{\omega_0}, \frac{\pi n}{\pi - \omega_0}, n\right\}$, $n = \pm 1, \pm 2, ...$

На множествах D_i рассмотрим пространство функций $W^k_{2,\beta}(D_i)$, $C^k_{\alpha,\beta}(D_i)$. При этом для $v \in W^k_{2,\beta}(D_i)$ норма функции определяется равенством

$$\|v\|_{W^k_{2,\beta}(D_i)} = \|e^{\beta\tau}v\|_{W^k_2(D_i)},$$

а для $v \in C^k_{\alpha,\beta}(D_i)$ равенством $\|v\|_{C^k_{\alpha,\beta}(D_i)} = \|e^{\beta\tau}v\|_{C^k_\alpha(D_i)}$. Аналогично пространства вводятся на R^1. Если проинтегрировать неравенство (13) по прямой $Im\ \lambda = \beta$, причем β не совпадает ни с одним из чисел множества N, то для решения задачи (10) получим оценку

$$\|v_1\|_{W^2_{2,\beta}(D_1)} + \|v_2\|_{W^2_{2,\beta}(D_2)} + \|s\|_{W^{3/2}_{2,\beta}(R_1)} \le c(\|\mathfrak{F}_0\|_{W^{1/2}_{2,\beta}(R_1)} + \|\mathfrak{F}_1\|_{L_{2,\beta}(D_1)} + \|\mathfrak{F}_2\|_{L_{2,\beta}(D_2)}).$$

С учетом этой оценки почти дословным повторением рассуждений работы [3] следует разрешимость задачи (10) в пространствах Гельдера.

Лемма. Если прямая $Im\ \lambda = \beta$ не содержит чисел множества N, то задача (10) имеет единственное решение в классах $C^2_{\alpha,\beta}$ и для него справедлива оценка

$$\|v_1\|_{C^2_{\alpha,\beta}(D_1)} + \|v_2\|_{C^2_{\alpha,\beta}(D_2)} + \|s\|_{C^2_{\alpha,\beta}(R_1)} \le c(\|e^{-\tau}F_0\|_{C^1_{\alpha,\beta}(R_1)} + \|e^{-2\tau}F_1\|_{C^0_{\alpha,\beta}(D_1)}$$
$$+\|e^{-2\tau}F_2\|_{C^0_{\alpha,\beta}(D_2)}). \tag{14}$$

В неравенстве (14) в качестве β возьмем число $\beta = 2 + \alpha$, где α выбрано так, чтобы $\beta \bar{\in} N$, и заметим, что пространство функций $\Lambda^k_\alpha(b_i)$ с нормой, определяемой равенством (4) (причем ρ определяется как расстояние до начала координат) в переменных (z_1, z_2) эквивалентно пространству функций $C^k_{\alpha,k+\alpha}(D_i)$ в переменных (τ, ω). Поэтому в условиях леммы существует единственное решение задачи (9) и для него выполняется оценка

$$\|v_1\|_{\Lambda^2_\alpha(G_1)} + \|v_2\|_{\Lambda^2_\alpha(G_2)} + \|s\|_{\Lambda^2_\alpha(R_1)} \le c(\|F_0\|_{\Lambda^1_\alpha(R_1)} + \|F_1\|_{\Lambda^0_\alpha(G_1)} + \|F_2\|_{\Lambda^0_\alpha(G_2)}). \tag{15}$$

С помощью оценки (15) для модельной задачи в точке A_i стандартным образом переходом к некоторой локальной в точке A_i системе координат и разбиения единицы [3] можно получить аналогичную оценку для решени задачи (5), (8) в окрестности точки A_i. Склеивая оценки по всей области Ω, для решения линейной задачи (5), (8) записываем неравенство

$$\|u_1\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_1)} + \|u_2\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_2)} + \|\rho^\alpha\psi\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_2)} + \sum_{i=1,2}\|f_i\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_i)} + \sum_{i=1,2}\|g_i\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_i)}$$
$$\le c(\|F_0\|_{\Lambda^1_\alpha(\gamma)} + \sum_{i=1,2}\|F_i\|_{\Lambda^0_\alpha(\Omega_i)} + \|\rho^\alpha F_3\|_{\Lambda^0_\alpha(\Omega_2)}), \tag{16}$$

которое и означает ограниченность обратного оператора линейной задачи.

При выводе неравенства (16) учли также тот факт, что величины $\max_{\Omega_i}|u_i|$, $\max_{\Omega_2}|\psi|$ можно оценить через правые части задачи.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть для тривиального решения задачи (1), соответствующего $\mu = 0$, кривая γ образует с $\partial\Omega$ ненулевые углы и $|\nabla w| \neq 0$ на $\bar{\gamma}$, тогда существует единственное решение задачи (3) для достаточно малых значений параметра μ.

Для полученного решения конечны нормы

$$\|v_i\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_i)}, \quad \|f_i\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_i)}, \quad \|g_i\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_i)}, \quad \|\rho^\alpha\psi\|_{\Lambda^2_\alpha(\Omega_2)}$$

и они стремятся к нулю при $\mu \to 0$.

В некоторых случаях при определенной геометрии области Ω отображение (2) можно конкретизировать. Пусть, например, Ω есть прямоугольник $\{(x_1, x_2): \ 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < l\}$ и задача, аналогичная (1), описывается соотношениями

$$\Delta u_1 = 0 \text{ в } \tilde{\Omega}_1, \quad \Delta u_2 = \psi_{x_2} u_{2x_1} - \psi_{x_1} u_{2x_2}, \quad \Delta\psi = \mu \text{ в } \tilde{\Omega}_2,$$

$$u_1(x_1, 0) = -1, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1}|_{x_1=0,1} = 0, \quad u_i(x_1, \xi(x_1)) = 0,$$

$$u_2(x_1, l) = d > 0, \qquad \psi = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\tilde{\Omega}_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \xi(x_1). \tag{17}$$

Здесь $d = const$, кривая $\tilde{\gamma}$ ищется в виде $x_2 = \xi(x_1)$. Приведенная постановка задачи интересна тем, что здесь можно явно построить обратный оператор в линейной задаче и, таким образом, оценить влияние перемешивания жидкой фазы на линию раздела фаз, используя разложение решения нелинейной задачи в ряд по μ.

Тривиальное решение, соответствующее задаче (17), есть $w(x) = \frac{d+1}{l}x_2 - 1$, а γ есть отрезок прямой $x_2 = h = \frac{l}{d+1}$. Сделаеем замену переменных:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2\frac{\xi(x_1)}{h} + l = y_2 + y_2\frac{s(x_1)}{h} \quad \text{в} \quad \Omega_1,$$

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = (y_2 - l)\frac{l - \xi(x_1)}{l - h} + l = y_2 + s(x_1)\frac{l - y_2}{l - h} \quad \text{в} \quad \Omega_2,$$

где $s(x_1) = \xi(x_1) - h$ есть искомая функция, которая задает отображение Ω_i, γ на $\tilde{\Omega}_i$, $\tilde{\gamma}$. После перехода к новым переменным и линеаризации получим линейную задачу

$$\Delta u_1 = F_1 \text{ в } \Omega_1, \quad \Delta u_2 = -\psi_{y_1}\frac{d+1}{l} + F_2, \quad \Delta\psi = F_3 \text{ в } \Omega_2,$$

$$u_1(y_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y_1}|_{y_1=0,1} = 0, \quad u_2(y_1, l) = 0,$$

$$u_2 = u_1 = -s\frac{d+1}{l} \quad \text{при} \quad y_2 = h, \quad \psi = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_2,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y_2} - \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = F_0 \quad \text{при} \quad y_2 = h. \tag{18}$$

Линейная задача (18) в этом случае существенно упрощается в силу условий периодичности на вертикальных границах области и перпендикулярности γ к таким кускам границы. В связи с этим исследование решения в окрестности точек A_i не отличается от рассмотрения во внутренних точках Ω и можно утверждать, что линейная задача (18) однозначно разрешима в классах Λ^2_α при любых периодических правых частях $F_i \in \Lambda^0_\alpha$, $F_0 \in \Lambda^1_\alpha$. Как следствие, отсюда получается разрешимость нелинейной задачи при малых μ.

Для того, чтобы найти первый член в разложении решения нелинейной задачи по μ, достаточно выписать решение задачи (18) при $F_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, $F_3 = 1$. Опуская громоздкие вычисления, записываем значение $s(y_1)$ при этих правых частях:

$$s(y_1) = \sum_{m,n=0} \frac{(l-h)^{-1}\cos\pi(2n+1)y_1}{\left[(2n+1)^2 + \left(\frac{2m+1}{l-h}\right)^2\right]^2 [\coth\pi(2n+1)h + \coth\pi(2n+1)(l-h)]} \times \frac{16}{\pi^5(2n+1)}.$$

Отсюда с точностью до членов, содержащих первые степени μ,

$$\xi(y_1) = h + \mu s(y_1), \quad |\xi - h| \le |\mu|/48.$$

Отметим также, что подобный метод исследования применим и в случае квазистационарной задачи Стефана с конвективным теплопереносом в жидкой фазе.

Список литературы

[1] *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.– Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, **16**, с. 209–292.

[2] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.– М.: Наука, 1964.– 538 с.

[3] *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решения эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.– Math. Nachr., 1978, **81**, с. 25–82.

ON A MODEL PROBLEM WITH SECOND DERIVATIVES WITH RESPECT TO GEOMETRIC VARIABLES IN THE BOUNDARY CONDITION FOR SECOND-ORDER PARABOLIC EQUATIONS

*Mathematical Notes–1998,–**63**, №3*

Consider the following problem. Let $\Omega \subset R^n$, $n \geq 3$, and let some coordinates $\omega = (\omega_1, ..., \omega_{n-1})$ be introduced on the boundary $\Gamma = \partial\Omega$. Let $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, and let $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. It is required to find functions $u(x, t)$ and $v(\omega, t)$ satisfying the conditions

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f_0(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + L_0 v = f_1(x,t), \quad u - v = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad v(\omega,0) = \psi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{1}$$

where

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)D_{x_i} + a(x,t), \quad L_0 = \sum_{i,j=1}^{n-1} \gamma_{ij}(\omega,t)D^2_{\omega_i\omega_j} + \gamma(\omega,t)$$

are uniformly elliptic operators, $(\vec{b}(x,t), \vec{n}) \geq b_0 > 0$, $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$, and $\vec{n}$ is the inward (with respect to Ω) normal on Γ. Obviously, for $\psi(\omega) = \varphi(x)|_\Gamma$, system (1) is equivalent to the problem of finding a single function $u(x,t)$ with boundary conditions containing second derivatives along the tangents to the boundary.

Apparently, such a nonclassical boundary value problem was first stated in [1]. The elliptic version of this problem was treated in [2]. In [3] a similar problem was studied for the case in which the parabolic operator is given on the boundary Γ_T, and in [4] a more complicated case of a quasilinear problem with a parabolic quasilinear operator on the boundary was treated. Finally, in [5] the fundamental solution of problem (1) was shown to exist in the half-space under some restrictions on the coefficients and the right-hand sides of the problem. Obviously, the fact that the boundary condition in (1) contains only an elliptic operator makes the linear version of the problem richer in content.

The general scheme for proving the solvability of classical boundary value problems for parabolic equations (the Dirichlet problem, the Neumann problem) outlined in [6, Chap. 4], is based on the study of some model problems in the half-space, so that the properties of these model problems are then transferred to the case of an arbitrary domain and arbitrary coefficients from some classes. Following this idea, we obtain a boundary value problem in our case by freezing the arguments in the coefficients, discarding lower-order terms, and straightening a part of the boundary Γ, which leads to the following problem. It is required to find functions $u(x,t)$, $v(x',t)$, $x=(x',x_n)$, defined in $R_+^{n,T} = \{(x,t):\ x\in R^n,\ x_n>0,\ t\in(0,T)\}$ and $R^{n-1,T}=\{(x',t):\ x'\in R^{n-1},\ t\in(0,T)\}$, respectively, and satisfying the conditions

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f_0(x,t), \qquad (x,t)\in R_+^{n,T},$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = f_1(x,t), \quad u-v=f_2(x,t), \quad (x,t)\in R^{n-1,T},$$

$$u(x,0)=0, \quad v(x',0)=0, \quad \vec{b}=(\beta_1,...,\beta_{n-1},1), \quad \min_i \gamma_i \geq \gamma_0 > 0. \tag{2}$$

Difficulties inherent in problem (2) are related principally to the study of the smoothness properties of the function $v(x',t)$ with respect to the variable t; this implies the special choice of spaces in which the solvability of problem (2) will be proved.

Let $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\Omega_T)$, where k is an integer, $\alpha\in(0,1)$ be the Hölder function space with norm $|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)}$ and seminorms [6, p.16]

$$\langle u\rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{x,y,t} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \langle u\rangle_t^{(\alpha)} = \sup_{x,\tau,t} \frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^\alpha},$$

$$\langle u\rangle^{(k+\alpha)} = \langle u\rangle_x^{(k+\alpha)} + \langle u\rangle_t^{(k+\alpha)}, \quad \langle u\rangle_x^{(k+\alpha)} = \sum_{2r+s=k} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_x^{(\alpha)},$$

$$\langle u\rangle_t^{(k+\alpha)} = \sum_{0<k+\alpha-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_t^{((k+\alpha-2r-s)/2)}.$$

Let us also introduced the seminorm [7]

$$[u]^{\alpha,\beta} = \sup_{x',y',t,\tau} \frac{|u(x',x_n,t)-u(y',x_n,t)-u(x',x_n,\tau)+u(y',x_n,\tau)|}{|x'-y'|^\alpha |t-\tau|^\beta}, \ \alpha,\beta\in(0,1),$$

and consider the subspaces $\Pi^{k+\alpha}$, $k=0,1,2$, of the corresponding spaces $H^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}$ for which the following seminorms are finite:

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(\alpha)} = \langle u\rangle^{(\alpha)} + [u]^{(\alpha,\alpha/2)}, \quad \langle\langle u\rangle\rangle^{(1+\alpha)} = \langle u\rangle^{(1+\alpha)} + [u]^{(\alpha,(1+\alpha)/2)} + [u_x]^{(\alpha,\alpha/2)},$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(2+\alpha)} = \langle u\rangle^{(2+\alpha)} + [u_x]^{(\alpha,(1+\alpha)/2)} + [u_{xx}]^{(\alpha,\alpha/2)} + [u_t]^{(\alpha,\alpha/2)}.$$

By $\underset{0}{\Pi}^{k+\alpha}$ we denote the subsets of functions from $\Pi^{k+\alpha}$ vanishing at $t=0$ together with their admissible derivatives with respect to t. By $\|\cdot\|_{\Pi^{k+\alpha}}$ we denote norms in the spaces $\Pi^{k+\alpha}$; they include the above seminorms and the norms from $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}$.

Theorem 1. *In problem (2), let* $f_0 \in \underset{0}{\Pi}^{\alpha}(R_+^{n,T})$, $f_k \in \underset{0}{\Pi}^{k+\alpha}(R^{n-1,T})$, $k = 1, 2$. *Then problem (2) has a unique solution, and the following inequality holds:*

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{R_+^{n,T}}^{(2+\alpha)} + \langle\langle v \rangle\rangle_{R^{n-1,T}}^{(2+\alpha)} + \langle\langle D_{x'}^2 v \rangle\rangle_{R^{n-1,T}}^{(1+\alpha)} \leq c(T)(\langle\langle f_0 \rangle\rangle_{R_+^{n,T}}^{(\alpha)} + \langle\langle f_1 \rangle\rangle_{R^{n-1,T}}^{(1+\alpha)} + \langle\langle f_2 \rangle\rangle_{R^{n-1,T}}^{(2+\alpha)}), \tag{3}$$

where $c(T)$ *remains bounded as* $T \to 0$.

The proof of the theorem consists in obtaining an explicit expression for the solution in terms of some potentials and proving the corresponding estimates. Let

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

be the fundamental solution of the heat equation. Consider the volume potential and the simple-layer potential

$$w(x,t) = \Gamma(x,t) \star f(x,t), \quad f(x,t) \in \underset{0}{\Pi}^{\alpha}(R^{n,T}),$$

$$w_1(x,t) = -2\Gamma(x', x_n, t) \star f_1(x',t), \quad f_1(x',t) \in \underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}(R^{n-1,T}).$$

The following estimates hold:

$$\langle\langle w \rangle\rangle_{R^{n,T}}^{(2+\alpha)} \leq c\langle\langle f \rangle\rangle_{R^{n,T}}^{(\alpha)}, \quad \langle\langle w_1 \rangle\rangle_{R_+^{n,T}}^{(2+\alpha)} \leq c\langle\langle f_1 \rangle\rangle_{R^{n-1,T}}^{(1+\alpha)}, \tag{4}$$

where the constants are independent of T. This allows us, without loss of generality, to consider problem (2) assuming that $f_0(x,t) \equiv 0$.

Let us denote the Fourier transform with respect to x' and the Laplace transform with respect to t of the function $f(x',t)$ by

$$\tilde{f}(\lambda, p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_{R^{n-1}} f(x',t) e^{-i(\lambda,x')} dx', \quad \lambda \in R^{n-1}.$$

Then problem (2) can be written in the form

$$(p + |\lambda|^2)\tilde{u}(\lambda, x_n, p) - \frac{d^2\tilde{u}}{dx_n^2}(\lambda, x_n, p) = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(\lambda, 0, p) + i\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \lambda_k \tilde{u}(\lambda, 0, p) - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \lambda_k^2 \tilde{v}(\lambda, p) = \tilde{f}_1(\lambda, p),$$

$$\tilde{u}(\lambda, 0, p) - \tilde{v}(\lambda, p) = \tilde{f}_2(\lambda, p). \tag{5}$$

Let $\tilde{u}(\lambda, x_n, p) = \tilde{m}(\lambda, p) \exp(-x_n\sqrt{p + |\lambda|^2})$ be the solution of the differential equation in (5) decreasing at infinity. Then from the boundary conditions we obtain

$$\tilde{m}(\lambda, p) = -\tilde{K}(\lambda, p)[\tilde{f}_1(\lambda, p) + (\sqrt{p + |\lambda|^2} - i(\beta, \lambda))\tilde{f}_2(\lambda, p)] + \tilde{f}_2(\lambda, p),$$

$$\tilde{v}(\lambda,p)=\tilde{m}(\lambda,p)-\tilde{f}_2(\lambda,p),\quad \tilde{K}(\lambda,p)=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\lambda_k^2+\sqrt{p+|\lambda|^2}-i(\beta,\lambda)\right)^{-1}. \qquad (6)$$

The function

$$K(x,t)=\frac{c}{t^{3/2}}\int_0^\infty \tau\frac{\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}-\frac{(x_1+\beta_1\tau)^2}{4(t+\gamma_1\tau)}-...-\frac{(x_{n-1}+\beta_{n-1}\tau)^2}{4(t+\gamma_{n-1}\tau)}\right)}{(t+\gamma_1\tau)^{1/2}...(t+\gamma_{n-1}\tau)^{1/2}}d\tau$$

is the inverse transform of $\tilde{K}(\lambda,p)$. Relations (6) formally define the solution of problem (2), and to obtain the estimate (3) at the first step, it suffices to study the smoothness properties of the function

$$g(x,t)=\int_{-\infty}^t d\tau\int_{R^{n-1}}K(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi,\quad f\in\underset{0}{\Pi}^{\alpha}(R^{n-1,T}),$$

where the function $-\tilde{m}(\lambda,p)\sqrt{p+|\lambda|^2}$ is the transform of $g(x,t)$, so that

$$g(x,t)=\frac{\partial u(x',x_n,t)}{\partial x_n}|_{x_n=0}.$$

Lemma 1. *The function $g(x,t)$ belongs to $\underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}(R^{n-1,T})$ and the following estimate holds:*

$$\langle\langle g\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{R^{n-1,T}}\le c\langle\langle f\rangle\rangle^{(\alpha)}_{R^{n-1,T}}. \qquad (7)$$

Note that the estimate (7), together with the second estimate in (4), directly leads to estimates of

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{R^{n,T}_+},\qquad \langle\langle v\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{R^{n-1,T}}$$

via the right-hand side of (3).

The proof of the lemma is based on estimates of the form

$$\int_0^\infty|D^l_xK(x,t)|dt\le c|x|^{-n+2-l},\qquad \int_{R^{n-1}}|D^l_xK(x,t)|dt\le ct^{-(l+1)/2}.$$

It follows from the first boundary condition in (2) that the function $v(x',t)\in\underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(R^{n-1,T})$ satisfies the relation

$$\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\frac{\partial^2v}{\partial x_i^2}=F(x',t),\qquad F(x',t)\in\underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}(R^{n-1,T}).$$

Lemma 2. *Let the function $w(x,t)\in\underset{0}{\Pi}^{2+\alpha}(R^{n-1,T})$ satisfy the equation*

$$\Delta w=F(x,t),\quad (x,t)\in R^{n-1,T},\quad F(x,t)\in\underset{0}{\Pi}^{1+\alpha}(R^{n-1,T}).$$

Then the following estimates are valid:

$$\langle\langle D_{x_i} D_{x_j} w\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{R^{n-1,T}} \leq c(T)\left(\langle\langle F\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{R^{n-1,T}} \langle\langle w\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{R^{n-1,T}}\right), \tag{8}$$

where $c(T)$ remains bounded as $T \to 0$.

The proof of the lemma is based on the expression for $w(x,t)$ in terms of the volume potential [8, Chap. III]. Namely, to obtain the estimates (8), we have to consider the seminorms $[\cdot]^{(\alpha,\beta)}$. Inequalities (7) and (8) imply the estimate (3).

As an example of the application of Theorem 1, let us consider problem (1) for $\Omega = R^n_+$.

Theorem 2. *Suppose that*

$$a_{ij}(x,t) \in \Pi^{1+\alpha}(R^{n,T}_+),\ a_i(x,t), a(x,t) \in \Pi^{\alpha}(R^{n,T}_+),\ \gamma_{ij}(x,t), \gamma(x,t) \in \Pi^{1+\alpha}(R^{n-1,T}),$$

$$\varphi(x), D_{x'}\varphi \in C^{2+\alpha}(R^n_+),\ \psi(x) \in C^{3+\alpha}(R^{n-1}),\ D_{x'} f_0(x,0) \in C^{\alpha}(R^n_+),$$

$$f_0(x,t) \in \Pi^{\alpha}(R^{n,T}_+),\ f_k(x,t) \in \Pi^{k+\alpha}(R^{n-1,T}),\ k = 1,2,$$

and the consistency conditions of zero order are satisfied. Then for $\alpha < 1/2$ there exists a $T_0 > 0$ such that for $0 < T < T_0$ there exists a unique solution of problem (1) and the following inequality is valid:

$$\|u\|_{\Pi^{2+\alpha}(R^{n,T}_+)} + \|v\|_{\Pi^{2+\alpha}(R^{n-1,T})} + \|D^2_x v\|_{\Pi^{1+\alpha}(R^{n-1,T})} \leq c(\|f_0\|_{\Pi^{\alpha}(R^{n,T}_+)} + \|f_1\|_{\Pi^{1+\alpha}(R^{n-1,T})}$$
$$+ \|f_2\|_{\Pi^{2+\alpha}(R^{n-1,T})} + \|D_{x'} f_0(x,0)\|_{C^{\alpha}(R^n_+)} + \|\varphi\|_{C^{2+\alpha}(R^n_+)} + \|D_{x'}\varphi\|_{C^{2+\alpha}(R^n_+)}$$
$$+ \|\psi\|_{C^{3+\alpha}(R^{n-1})}).$$

The solvability of problem (1) only in the small with respect to time and the enhanced smoothness conditions for the coefficients of the problem and the initial data stem from the loss of smoothness in the inversion of the operator corresponding to problem (1). Nevertheless, the results obtained can apparently be applied, for example, to the study of the solvability of nonlinear problems in the small with respect to time in classes of smooth functions without applying the more elaborate technique of the Nash-Moser implicit function theorem.

This research was partially supported by the DFFD of the Ukraine under grant No. 1.4/127.

References

[1] *A.D. Venttsel',* Teor. Veoryatnost. i Primenen.[Theory Probab. Appl.], **2**, No. 2, 172–185 (1959).

[2] *Y.S. Luo and N.S. Trudinger,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, **118**, 193–207 (1991).

[3] *Y. Zeng and Y.S. Luo,* Bull. Austral. Math. Soc., **51**, 465–479 (1995).

[4] *D.E. Apushkinskaya and A.I. Nazarov,* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **164**, 1–13 (1995).

[5] *B.I. Kopytko,* Random Oper. Stochastic Equations, **1**, No. 1, 95–102 (1992).

[6] *O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'tseva,* Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

[7] *V.A. Solonnikov,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. [Math. USSR-Izv.], **41**, No. 6, 1388–1424 (1977).

[8] *O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva,* Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type [in Russian], Nauka, Moscow (1964).

STEFAN PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION WITH REGARD FOR THE CURVATURE OF THE FREE BOUNDARY

*Ukrainian Mathematical Journal–1997,–**49**, №10*

1. Statement of the Problem and Principal Result

Denote by $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, a given domain with boundary $\partial\Omega$ consisting of two disjoint components Γ^+ and Γ^- such that Γ^+ lies inside the bounded domain whose boundary is Γ^-. Assume that the surface $\Gamma \subset \Omega$ divides Ω into two connected subdomains $\Omega^\pm$ so that $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup\ \Gamma^\pm$. Let $\omega = (\omega_1, ..., \omega_{n-1})$ be certain coordinates on Γ, let $y(\omega) \in \Gamma$ be the corresponding point in R^n, and let $\vec{\nu}(\omega)$ be a unit vector normal to Γ and directed inside Ω^+. Further, assume that $\gamma_0 > 0$ is such that the surfaces $\{y = y(\omega) \pm 2\vec{\nu}(\omega)\gamma,\ 0 < \gamma < \gamma_0\}$ do not have self-intersections and do not intersect $\Gamma^\pm$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$, and $\Omega^\pm_{\rho,T}$, is the domain bounded by the planes $\tau = 0$ and $\tau = T$ and the surfaces $\Gamma_T^\pm$ and $\Gamma_{\rho,T} = \{(y, \tau) :\ y = y(\omega) + \vec{\nu}(\omega)\rho(\omega, \tau),\ \tau \in [0, T]\}$, where $|\rho(\omega, \tau)| < \gamma_0$. The required (free) boundary $\Gamma_{\rho,T}$ is thus defined of its deviation from the fixed surface Γ_T with respect to the normal [6].

The considered problem with free boundary is to find functions $u^\pm(y, \tau)$ and $\rho(\omega, \tau)$ defined in the domains $\Omega^\pm_{\rho,T}$ and on Γ_T respectively, by the conditions

$$-\Delta_y u^\pm = 0, \quad (y, \tau) \in \Omega^\pm_{\rho,T}, \quad u^\pm = b^\pm(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \Gamma_T^\pm,$$

$$kv = (a^-\nabla_y u^- - a^+\nabla_y u^+, \bar{n}(y, \tau)),$$

$$u^+ = u^- = \gamma k(y, \tau),\ (y, \tau) \in \Gamma_{\rho,T},\ u^\pm(y, 0) = u_0^\pm(y),\ \rho(\omega, 0) = 0, \tag{1}$$

where $a^\pm$, γ, and k are given positive constants, $k(y, \tau)$ is the mean curvature of the surface $\Gamma_{\rho,T}$ for $\tau = const$, v is the velocity of motion of the free boundary in the direction of the normal $\bar{n}(y, \tau)$ to $\Gamma_{\rho,T}$ directed inside $\Omega^+_{\rho,T}$, $b^\pm(y, \tau)$ are given functions, and $\nabla_y = \{\partial/\partial y_i\}$, $\Delta_y = \nabla_y^2$. We consider the spaces $H^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, where l is an integer number and $\alpha \in (0, 1)$, and the spaces $H^{l+\alpha,(l+\alpha)/3}_{x,t}(\bar{\Omega}_T)$ constructed by analogy with the spaces $H^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}_{x,t}(\bar{\Omega}_T)$ [7, p.349]. Following [8], we introduce the seminorm

$$[u]^{\alpha,\beta}_{\Omega_T} = \sup_{x,y,t,\tau} \frac{|u(x, t) - u(y, t) - u(x, \tau) + u(y, \tau)|}{|x - y|^\alpha |t - \tau|^\beta}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1),$$

and define the Banach spaces $E^{l+\alpha,\alpha/3}(\bar{\Omega}_T)$ obtained by the closure of infinitely differentiable functions in the norm

$$\|u\|^{(l,\alpha/3)}_{\Omega_T} = \sum_{k=0}^{l} \|D_x^k u\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T}, \quad \|u\|^{\alpha,\alpha/3}_{\Omega_T} = |u|^{(\alpha)}_{\Omega_T} + [u]^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T},$$

$$|u|^{(\alpha)}_{\Omega_T} = |u|^{(0)}_{\Omega_T} + \langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \langle u\rangle^{(\alpha/3)}_{t,\Omega_T}, \quad |u|^{(0)}_{\Omega_T} = \sup_{\Omega_T}|u(x,t)|,$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} = \sup_{x,y,t}\frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad \langle u\rangle^{(\alpha/3)}_{t,\Omega_T} = \sup_{x,\tau,t}\frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha/3}}.$$

We introduce the seminorm

$$|||u|||^{(4+\alpha)}_{\Omega_T} = |u_x|^{(3+\alpha)}_{\Omega_T} + \|u_t\|^{(1+\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T} + [D^3_x u]^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T},$$

where $|\cdot|^{(3+\alpha)}_{\Omega_T}$ is the norm of the space $H^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}(\bar\Omega_T)$. Note that, for functions that are equal to zero if $t=0$, this is a norm. Taking the closure of infinitely differentiable functions, we obtain a space and denote it by $P^{4+\alpha}(\bar\Omega_T)$. The spaces $\underset{0}{E}^{l+\alpha,\alpha/3}(\bar\Omega_T)$ and $\underset{0}{P}^{4+\alpha}(\bar\Omega_T)$ denote the subspaces of functions of the corresponding spaces that, together with their admissible derivatives with respect to t, vanish for $t=0$. Assume that a function $u(x,t)$ belongs to $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ and there exists a generalized derivative of this function with respect to t such that

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u_1(x,t) + \nabla_x \bar u_2(x,t),$$

where u_1, $\bar u_2 \in E^{\alpha,\alpha/3}$. Denote the subspace of such functions belonging to $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ by $\hat H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ and introduce a norm in this space as follows:

$$|u|_{\hat H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\bar\Omega_T)} = |u|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T} + \inf_{u_1,\bar u_2}(\|u_1\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T} + \|\bar u_2\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T}).$$

Assume that the following conditions are satisfied for problem (1): $\Gamma \in H^{6+\alpha}$, $\Gamma^{\pm} \in H^{6+\alpha}$, $b^{\pm}(y,\tau) \in E^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma^{\pm}_T)$, $u^{\pm}_0 \in H^{4+\alpha}(\bar\Omega^{\pm})$, $\Delta_y u^{\pm}_0(y) = 0$, and the consistency conditions up to the first order inclusive.

Theorem 1. *Suppose that the data of problem (1) satisfy the conditions indicated above. Then, for* $n=2$, *one can find* $T_0>0$ *dependent on these data and such that, for* $0<T<T_0$, *there exists a solution* $u^{\pm}(y,\tau) \in E^{2+\alpha,\alpha/3}(\bar\Omega^{\pm}_{\rho,T})$, $\rho(\omega,\tau) \in P^{4+\alpha}(\Gamma_T)$. *For* $n=3$, *this assertion remains true if the eigenvalues of the matrix* $\{k_{ij}(\omega,0,0)\}$, *where* $k_{ij}(\omega,0,0)$ *are defined in (2), are sufficiently close.*

2. Reduction of the Original Problem to a Problem in a Fixed Domain

Denote by $N = \{y\in\Omega:\ dist(y,\Gamma)<\gamma_0\}$ a neighborhood of the surface Γ and introduce the coordinates (ω,λ) according to the equality $y(\omega,\lambda) = y(\omega)+\lambda\vec\nu(\omega)$, $y(\omega)\in\Gamma$, $|\lambda|<\gamma_0$. Then, in these coordinates, $N=\{y(\omega,\lambda):\ (\omega,\lambda)\in\Gamma\times(-\gamma_0,\gamma_0)\}$. Assume that $\chi(\lambda)$ belongs to C^∞_0 and is equal to one for $\lambda=0$. We define a one-to-one mapping $e_\rho(x,t)$ of the domain $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$ into itself as follows [6]:

$$e_\rho(x,t):(x,t)\to(y,\tau) = (y(\omega(x),\lambda(x)+\chi(\lambda(x))\rho(\omega(x),t)),t),$$

where $(\omega(x), \lambda(x))$ are the coordinates of a point $x \in N$. Under the mapping $e_\rho(x,t)$, the surface Γ_T is transformed into the surface $\Gamma_{\rho,T}$, whereas the points of the surfaces $\Gamma_T^\pm$ remain fixed. The equation of the surface $\Gamma_{\rho,T}$ has the form $\Phi(y,\tau) = \lambda(y) - \rho(\omega,\tau) = 0$, and the first condition on the free boundary in (1) takes the following form:

$$k\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^-(\nabla_\rho u^-, \nabla_\rho \Phi) - a^+(\nabla_\rho u^+, \nabla_\rho \Phi),$$

where the function $u^\pm(y,\tau) \circ e_\rho(x,t)$ is again denoted by $u^\pm$, $\nabla_\rho = (E_\rho^*)^{-1}\nabla_x$, $\nabla_x = \{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$, and $E_\rho^*(x,t)$ is a matrix adjoint to the Jacobi matrix of the mapping $e_\rho(x,t)|_{t=const}$: $x \to y$. Taking into account that $\Phi = 0$ on Γ_T, we obtain

$$k\frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\omega,\rho,\rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial \lambda} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial \lambda}\right] + \sum_{k=1}^{n-1} S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial \omega_k} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial \omega_k}\right],$$

where $S(\omega,\rho,\rho_\omega)$ and $S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)$ are certain smooth functions [6] such that

$$S(\omega,0,0) = 1, \quad S_{\rho_\omega}(\omega,0,0) = 0, \quad S^{(k)}(\omega,0,0) = 0.$$

We define the surface $\Gamma_{\rho,T}$ in the form $\bar{r}(\omega,t) = \bar{R}(\omega) + \vec{\nu}(\omega)\rho(\omega,t)$, where $\bar{R} = \bar{R}(\omega)$ is the equation of the surface Γ. The mean curvature of $\Gamma_{\rho,T}$ in the section $t = const$ is calculated by using the coefficients of the first and second quadratic forms of the surface $\Gamma_{\rho,T}$ and can be represented as follows:

$$k(y,t) = k(\omega,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega}) = \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)\rho_{\omega_i\omega_j} + k_0(\omega,\rho,\rho_\omega), \tag{2}$$

where k_{ij} and k_0 are smooth functions of their arguments and one can assume that $\det\{k_{ij}(\omega,0,0)\} \geq \varepsilon_0 > 0$. A similar representation for the curvature of $\Gamma_{\rho,T}$ is also true in the case $n = 2$.

After the indicated change of variables, problem (1) can be formulated as follows: It is necessary to find functions $u^\pm(x,t)$ and $\rho(\omega,t)$ determined in $\Omega_T^\pm$ and on Γ_T, respectively, by the conditions

$$-\nabla_\rho^2 u^\pm = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T^\pm,$$

$$k\frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\omega,\rho,\rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial \lambda} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial \lambda}\right] + \sum_{k=1}^{n-1} S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial \omega_k} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial \omega_k}\right],$$

$$u^+ = u^- = \gamma \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)\rho_{\omega_i\omega_j} + \gamma k_0(\omega,\rho,\rho_\omega), \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

$$u^\pm = b^\pm(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^\pm, \quad u^\pm(x,0) = u_0^\pm(x), \quad \rho(\omega,0) = 0. \tag{3}$$

3. Reduction of the Problem with Free Boundary to a Functional Equation

Let us determine functions $s(\omega,t)\in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\Gamma_T)$ and $w^{\pm}\in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar\Omega_T^{\pm})$ such that $w^+=w^-$ on Γ_T, $w^{\pm}(x,0)=u_0^{\pm}(x)$, $s(\omega,0)=0$, and $s_t(\omega,0)=\rho_t(\omega,0)$, where $\rho_t(\omega,0)$ is determined from the conditions on $\Gamma_{\rho,T}$, i.e., in fact, from the condition of consistency. A method for the construction of functions of this sort was indicated in [7, Chap. 4]; according to this method,

$$\|w^+\|_{H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar\Omega_T^+)}+\|w^-\|_{H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar\Omega_T^-)}+\|s\|_{H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar\Gamma_T)}$$

$$\le C(T)(\|u_0^+\|_{H^{4+\alpha}(\bar\Omega^+)}+\|u_0^-\|_{H^{4+\alpha}(\bar\Omega^-)}),\quad C(T)\le const.\ as\ T\to 0.$$

Instead of the required functions in problem (2), we introduce new unknown functions $v^{\pm}(x,t)=u^{\pm}(x,t)-w^{\pm}(x,t)$ and $\sigma(\omega,t)=\rho(\omega,t)-s(\omega,t)$, for which problem (2) can be reduced to a problem with zero initial conditions. Finally, we perform one more change of unknown functions $\theta^{\pm}(x,t)=v^{\pm}(x,t)-(\nabla w^{\pm},\delta e_\sigma)$, where

$$\delta e_\sigma(x,t)=\frac{\partial\bar x}{\partial\lambda}(\omega,\lambda)\chi(\lambda)\sigma(\omega,t).$$

Let us introduce the operators $L_0=-\nabla^2$ and $L_\rho=-\nabla_\rho^2$, which satisfy the relation $(L_0u)\circ e_\rho=L_\rho(u\circ e_\rho)$. One can verify that relations (3) can be rewritten as follows (after the separation of linear terms "leading" with respect to norm):

$$L_0\theta^{\pm}=\mathfrak{F}_0^{\pm}(v^{\pm},\sigma),\quad (x,t)\in\Omega_T^{\pm},$$

$$k\frac{\partial\sigma}{\partial t}+a^+\frac{\partial\theta^+}{\partial n}-a^-\frac{\partial\theta^-}{\partial n}=\mathfrak{F}_1(v^+,v^-,\sigma),$$

$$\theta^{\pm}-\gamma\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{D(\omega)}\frac{\partial}{\partial\omega_i}(\mu_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_j})+\gamma\frac{\sigma(\omega)}{D(\omega)}=\gamma\mathfrak{F}_3(\sigma)+\mathfrak{F}_4^{\pm},\quad (x,t)\in\Gamma_T,$$

$$\theta^{\pm}=\mathfrak{F}_2^{\pm}(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_T^{\pm},\tag{4}$$

where

$$\mathfrak{F}_0^{\pm}(v^{\pm},\sigma)=(L_0w^{\pm})\circ e_s-(L_0w^{\pm})\circ e_\rho-L_sw^{\pm}-(L_\rho-L_0)(w^{\pm}-w^{\pm}\circ e_\rho)+(L_s-L_0)(w^{\pm}$$

$$-w^{\pm}\circ e_s)-L_0[w^{\pm}+(\nabla w^{\pm},\delta e_\rho)-w^{\pm}\circ e_\rho]+L_0[w^{\pm}+(\nabla w^{\pm},\delta e_s)-w^{\pm}\circ e_s]-(L_\rho-L_0)v^{\pm},$$

$$\mathfrak{F}_1(v^+,v^-,\sigma)=-k\frac{\partial s}{\partial t}+\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}\right)S(\omega,s,s_\omega)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k}\right)$$

$$\times S^{(k)}(\omega,s,s_\omega)-(1-S(\omega,\rho,\rho_\omega))\left(a^-\frac{\partial v^-}{\partial n}-a^+\frac{\partial v^+}{\partial n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k}\right)$$

$$\times\left[S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)-S^{(k)}(\omega,s,s_\omega)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)\sigma_{\omega_i}\right]+\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}\right)$$

$$\times\left[S(\omega,\rho,\rho_\omega)-S(\omega,s,s_\omega)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial S}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)\sigma_{\omega_i}\right]+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^-\frac{\partial v^-}{\partial \omega_k}-a^+\frac{\partial v^+}{\partial \omega_k}\right)$$

$$\times S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)-\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}\right)+\left(a^-\frac{\partial^2 w^-}{\partial n^2}-a^+\frac{\partial^2 w^+}{\partial n^2}\right)\sigma-\sum_{i=1}^{n-1}b_i(\omega,t)\sigma_{\omega_i},$$

$$b_i(\omega,t)=\left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}-a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial \omega_k}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial \omega_k}\right)\frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega),$$

$$\mathfrak{F}_3(\sigma)=\sum_{i,j}[k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)-k_{ij}(\omega,s,s_\omega)]\sigma_{\omega_i\omega_j}+\sum_{i,j}k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)s_{\omega_i\omega_j}+\sum_{i,j}[k_{ij}(\omega,s,s_\omega)$$

$$-k_{ij}(\omega,0,0)]\sigma_{\omega_i\omega_j},\quad \mu_{ij}(\omega)=D(\omega)k_{ij}(\omega,0,0),\quad \mathfrak{F}_4^{\pm}(\sigma)=-w^{\pm}+\frac{\sigma(\omega)}{D(\omega)}-\frac{\partial w^{\pm}}{\partial n}\sigma(\omega)$$

$$+\gamma k_0(\omega,\rho,\rho_\omega)+\gamma k_1(\omega,\rho,\rho_\omega),\ k_1(\omega,\rho,\rho_\omega)=-\frac{1}{D(\omega)}\sum_{i,j}\rho_{\omega_j}\frac{\partial}{\partial\omega_i}k_{ij}(\omega,0,0),$$

$$\mathfrak{F}_2^{\pm}=b^{\pm}(x,t)-w^{\pm}(x,t),\quad D^2(\omega)=|R_{\omega_1}|^2|R_{\omega_2}|^2-(R_{\omega_1},R_{\omega_2})^2.$$

Let us introduce spaces H_Ψ and $H_{\mathfrak{F}}$ as follows:

$$H_\Psi=\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\bar\Omega_T^+)\times\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\bar\Omega_T^-)\times\underset{0}{P}^{4+\alpha}(\Gamma_T),$$

$$H_{\mathfrak{F}}=\underset{0}{E}^{\alpha,\alpha/3}(\bar\Omega_T^+)\times\underset{0}{E}^{\alpha,\alpha/3}(\bar\Omega_T^-)\times\underset{0}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T)\times\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T^+)$$

$$\times\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T^-)\times\underset{0}{\hat H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T)\times\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T)\times\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T);$$

the elements of these spaces are $\Psi=(\theta^+,\theta^-,\sigma)$ and $\mathfrak{F}=(\mathfrak{F}_0^+,\mathfrak{F}_0^-,\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2^+,\mathfrak{F}_2^-,\mathfrak{F}_3,\mathfrak{F}_4^+,\mathfrak{F}_4^-)$, respectively. Then relations (4) can be rewritten in the following brief form:

$$A\Psi=\mathfrak{F}(\varphi),\quad \varphi=(v^+,v^-,\sigma),\tag{5}$$

where the linear operator A is determined by the left-hand sides of relations (4), and the nonlinear operator $\mathfrak{F}(\varphi)$ is determined by their right-hand sides.

The spaces H_Ψ and $H_{\mathfrak{F}}$ are chosen so that the operator A is bounded from H_Ψ and $H_{\mathfrak{F}}$. It is only necessary to explain the fact that $f(\omega,t)\equiv(\mu_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_j})_{\omega_i}\in\hat H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T)$. Clearly, for $\sigma\in P^{4+\alpha}(\Gamma_T)$, we have $f(\omega,t)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T)$. Furthermore, $f_t=(\mu_{ij}(\omega)\sigma_{t\omega_j})_{\omega_i}=div_\omega\bar u_2(\omega,t)$ and $\bar u_2(\omega,t)\in E^{\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T)$.

Our purpose now is to show that the operator A has a bounded inverse.

4. Investigation of a Model Problem of Conjugation

Consider the problem of finding functions $u^{\pm}(z,t)$ and $\rho(z',t)$ satisfying the conditions

$$-\Delta u^{\pm} = f^{\pm}(z,t), \quad (z,t) \in R_T^{\pm},$$

$$k\frac{\partial \rho}{\partial t} + a^{+}\frac{\partial u^{+}}{\partial z_n} - a^{-}\frac{\partial u^{-}}{\partial z_n} = f_1(z',t),$$

$$u^{\pm} - \gamma a_{ij}\rho_{z_i z_j} = \gamma f_3(z',t) + f_4^{\pm}(z',t), \quad (z',t) \in R'_T,$$

$$u^{\pm}(z,0) = 0, \quad \rho(z',0) = 0, \tag{6}$$

where $R_T^{\pm} = \{(z,t) : \ z = (z', z_n), \ z' \in R^{n-1}, \ \pm z_n > 0, \ t \in (0,T)\}$, $R'_T = \partial R_T^{\pm}$, k, γ, and $a^{\pm}$ are positive constants, and the matrix $\{a_{ij}\}$ is positive definite and satisfies the condition $\nu|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}|\xi|^2$. Since the quadratic form related to the Laplace equation is positive definite, we can choose coordinates z' so that the form $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ reduces to the diagonal form and, therefore, we can assume that $a_{ij} = 0$ for $i \ne j$. Let

$$f^{\pm} \in \underset{0}{E}^{\alpha,\alpha/3}(R_T^{\pm}), \qquad f_1 \in \underset{0}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(R'_T),$$

$$f_3 \in \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(R'_T), \qquad \textit{and} \qquad f_4^{\pm} \in \underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R'_T)$$

and let these functions be finite. We seek a solution of the problem of conjugation (5) in the classes

$$u^{\pm}(z,t) \in \underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T^{\pm}), \quad \rho(z',t) \in \underset{0}{P}^{4+\alpha}(R'_T).$$

Also note that, without loss of generality, we can set $f^{\pm} = 0$ and $f_4^{\pm} = 0$ in system (6). Indeed, for this purpose, it suffices to show that a solution of the problem

$$\Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in R_T^{+}, \quad f \in \underset{0}{E}^{\alpha,\alpha/3}(R_T^{+}),$$

$$u = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in R'_T, \quad \varphi \in \underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R'_T)$$

belongs to the space $E^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T^{+})$. To this end, in addition to the well-known fact that $u \in C^{2+\alpha}(R_T^{+})$, we must estimate the seminorms $\langle u\rangle_t^{(\alpha/3)}$ and $[u]^{(\alpha,\alpha/3)}$ of the function $u(x,t)$ and of its derivatives. It is easy to obtain estimates of the indicated seminorms for the volume potential and double-layer potential via the corresponding seminorms of densities of these potentials [see the proof of inequality (25) below] and, consequently, these estimates are true for the solution of the considered problem.

Denote by $\tilde{f}(\lambda, z_n, p)$ the Fourier and Laplace transforms in variables z' and t, respectively, of the function $f(z', z_n, t)$, i.e.,

$$\tilde{f}(\lambda, z_n, p) = \int_{R^{n-1}} dz' \int_0^{\infty} f(z', z_n, t) e^{-i(z',\lambda) - pt} dt, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}).$$

After applying these transformations to relations (6), we obtain

$$\lambda^2\tilde{u}^{\pm} - \frac{\partial^2\tilde{u}^{\pm}}{\partial z_n^2} = 0, \quad kp\tilde{\rho} + a^{+}\frac{\partial\tilde{u}^{+}}{\partial z_n} - a^{-}\frac{\partial\tilde{u}^{-}}{\partial z_n} = \tilde{f}_1(\lambda, p),$$

$$\tilde{u}^{\pm} + \gamma\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\lambda_i^2\tilde{\rho} = \gamma\tilde{f}_3(\lambda, p). \tag{7}$$

The first relation in (7) yields

$$\tilde{u}^{\pm}(\lambda, z_n, p) = M^{\pm}\exp(\mp|\lambda|z_n), \quad |\lambda|^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2,$$

$$\frac{\partial\tilde{u}^{\pm}}{\partial z_n}|_{z_n=0} = \mp M^{\pm}|\lambda|,$$

and the other two relations imply that

$$M^{\pm} = \frac{kp\tilde{\rho} - \tilde{f}_1}{|\lambda|(a^{+} + a^{-})},$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{f}_1 + \gamma\tilde{f}_3(a^{+} + a^{-})|\lambda|}{kp + \gamma(a^{+} + a^{-})|\lambda|(a\lambda, \lambda)} = \frac{\tilde{F}(\lambda, p)}{kp + b|\lambda|(a\lambda, \lambda)},$$

$$b = \gamma(a^{+} + a^{-}), \quad (a\lambda, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\lambda_i^2. \tag{8}$$

We now consider separately the cases $n = 2$ and $n = 3$.

In the case $n = 2$, it follows from (8) that the function $\rho(z, t)$ can be represented as the convolution

$$\rho(z, t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(z - \zeta, t - \tau)F(\zeta, \tau)d\zeta, \tag{9}$$

where $F(x, t)$ is the preimage of the function $\tilde{F}(\lambda, p)$, and $K(x, t)$ is the preimage of the function $\tilde{K}(\lambda, p) = (kp + ba_{11}|\lambda|^3)^{-1}$. Clearly, in studying the smoothness properties of the function $\rho(z, t)$, we can set $k = 1$ and $ba_{11} = 1$. Then

$$K(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda^3}\cos\lambda x d\lambda. \tag{10}$$

We can not obtain an expression for the integral in (10) that is convenient for further estimates, although it is possible to represent it in terms of the cylindrical functions $Z_{1/3}(x/t^{1/3})$. However, it turns out that it suffices to know only the asymptotic properties of this integral. After performing the change of variable $\lambda t^{1/3} = z$, we get

$$K(x, t) = t^{-1/3}\int_0^{\infty} e^{-z^3}\cos yz dz, \quad y = xt^{-1/3}. \tag{11}$$

Integrating several times by parts, we obtain

$$K(x,t) = -\frac{1}{y^4 t^{1/3}}\left\{\frac{d^3}{dz^3}(e^{-z^3})\cos yz|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d^4}{dz^4}(e^{-z^3})\cos yz dz\right\},$$

whence

$$K(x,t) = \frac{1}{t^{1/3}}\left[-\frac{6}{y^4} - o(y^{-4})\right] \quad as \quad |y| \to \infty. \tag{12}$$

Similarly, we can show that, as $|y| \to \infty$,

$$\begin{aligned} D_x^l K(x,t) &= c_1 t^{-(l+1)/3}(y^{-4-l} + o(y^{-4-l})), \quad l = 0,1,..., \quad y = xt^{-1/3}, \\ D_x^l D_t K(x,t) &= c_2 t^{-(l+4)/3}(y^{-4-l} + o(y^{-4-l})), \quad l = 0,1,..., \\ D_t^{2m} K(x,t) &= c_3 t^{-(6m+1)/3}(y^{-4-6m} + o(y^{-4-6m})), \quad m = 0,1,..., \\ D_t^{2m+1} K(x,t) &= c_4 t^{-(6m+4)/3}(y^{-4-6m} + o(y^{-4-6m})), \quad m = 0,1,..., \end{aligned} \tag{13}$$

where the constants depend on l and m.

Assume that the function $f(x,t)$ belongs to $\underset{0}{E}^{\alpha,\alpha/3}$ and is finite. Let us study the properties of the potential

$$g(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi. \tag{14}$$

Let

$$g_h(x,t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi.$$

Then

$$\frac{\partial g_h}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, h) f(\xi, t-h) d\xi.$$

By using (12), we can show that

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, h) f(\xi, t) d\xi = f(x,t). \tag{15}$$

Therefore,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial g_h}{\partial t} = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)] d\xi + f(x,t). \tag{16}$$

Similarly, we obtain

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)] d\xi + f(x,t). \tag{17}$$

Relation (17) implies the representation

$$D_x^3 g(x,t) - D_{x'}^3 g(x',t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi$$

$$-\int_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} D_{x'}^3 K(x'-\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau)-f(x',\tau)]d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{|x-\xi|>2|x-x'|} [D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)-D_{x'}^3 K(x'-\xi,t-\tau)][f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{|x-\xi|>2|x-x'|} D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)[f(x',\tau)-f(x,\tau)]d\xi \equiv \sum_{i=1}^{4} I_i. \qquad (18)$$

It follows from (10) that

$$D_x^3 K(x-\xi,t-\tau) = \int_0^\infty \exp[-(t-\tau)\lambda^3]\lambda^3 \sin\lambda(x-\xi)d\lambda = (t-\tau)^{-4/3}\int_0^\infty \exp[-z^3]$$

$$\times z^3 \sin yz dz, \quad y = \frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}.$$

Hence, for $|(x-\xi)/(t-\tau)^{1/3}| \le 1$, the estimate

$$|D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)| \le \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{5/3}}\int_0^\infty \exp[-z^3]z^4 dz \le c\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{5/3}} \qquad (19)$$

is true. For $|(x-\xi)/(t-\tau)^{1/3}| > 1$, according to (13), we obtain

$$|D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)| \le \frac{c}{(t-\tau)^{4/3}|y|^7} = c\frac{t-\tau}{|x-\xi|^7}. \qquad (20)$$

When estimating the first term in (18), we split the interval of integration over τ into the interval $(-\infty, t-|x-\xi|^3)$, where estimate (19) is true, and the interval $(t-|x-\xi|^3, t)$, where estimate (20) is used. Thus,

$$|I_1| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int\limits_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} d\xi \left\{ \int\limits_{-\infty}^{t-|x-\xi|^3} \frac{|x-\xi|^{1+\alpha}}{(t-\tau)^{5/3}}d\tau + \int\limits_{t-|x-\xi|^3}^{t} \frac{(t-\tau)|x-\xi|^\alpha}{(x-\xi)^7}d\tau \right\}$$

$$\le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int\limits_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} |x-\xi|^{\alpha-1}d\xi \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}|x-x'|^\alpha.$$

The second term in (18) can be estimated by analogy. To estimate the third term, we use the mean-value theorem and the inequalities

$$|D_x^4 K(x-\xi,t-\tau)| \le \begin{cases} c(t-\tau)^{-5/3}, & \text{for } \tau \le t-|x-\xi|^3, \\ c\frac{t-\tau}{|x-\xi|^8}, & \text{for } \tau > t-|x-\xi|^3, \end{cases}$$

whence

$$|I_3| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}|x-x'|^\alpha.$$

Since the function $D_x^2 K(x,t)$ is even, we have $I_4 = 0$, which yields

$$\langle D_x^3 g(x,t)\rangle_x^{(\alpha)} \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{21}$$

Now estimate the Hölder constant of the function $D_x^3 g(x,t)$ in the variable t. For $t' < t$, (16) implies

$$D_x^3 g(x,t) - D_x^3 g(x,t') = \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi$$

$$-\int_{2t'-t}^{t'} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi,t'-\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi + \int_{-\infty}^{2t'-t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} [D_x^3 K(x-\xi,$$

$$t-\tau) - D_x^3 K(x-\xi,t'-\tau)][f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi \equiv \sum_{i=1}^{3} I_i. \tag{22}$$

The first two terms can be estimated similarly. For example,

$$|I_1| \le \langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-\xi|^\alpha}{(t-\tau)^{4/3}} \left| \int_0^\infty \exp(-z^3) z^3 \sin\frac{(x-\xi)z}{(t-\tau)^{1/3}} dt \right| d\xi$$

$$= \langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_{2t'-t}^{t} d\tau (t-\tau)^{-1+\alpha/3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha \left| \int_0^\infty \exp(-z^3) z^3 \sin yz dz \right| dy \right]$$

$$\le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (t-t')^{\alpha/3}$$

because the expression in brackets is bounded by virtue of the asymptotic properties of the inner integral for $y \to \infty$. To estimate the third term in (22), we use the mean-value theorem and the asymptotics of the function $D_t D_x^3 K(x,t)$. We get

$$|I_3| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (t-t')^{\alpha/3}.$$

This yields

$$\langle D_x^3 g(x,t)\rangle_t^{(\alpha/3)} \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{23}$$

Let us estimate the seminorm $[D_x^3 g(x,t)]_t^{(\alpha,\alpha/3)}$. Since we can assume that the functions $f(x,t)$ and $K(x,t)$ are continued by zero in the domain $t<0$, we have the following representation:

$$D_x^3 g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi,\tau)[f(\xi,t-\tau) - f(x,t-\tau)]d\xi.$$

Let $\Delta t > 0$ and let

$$F(x,t) = \frac{D_x^3 g(x,t) - D_x^3 g(x,t-\Delta t)}{(\Delta t)^{\alpha/3}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} D_x^3 K(x-\xi,t-\tau)[\varphi(\xi,\tau)$$
$$-\varphi(x,\tau)]d\xi,$$

where $\varphi(x,t) = |f(x,t) - f(x,t-\Delta t)|/(\Delta t)^{\alpha/3}$. Relation (21) implies the estimate

$$\langle F(x,t)\rangle_t^{(\alpha)} \le c\langle \varphi(x,t)\rangle_x^{(\alpha)}.$$

On the other hand,

$$\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{x,y}\frac{|\varphi(x,t)-\varphi(y,t)|}{|x-y|^\alpha} = \sup_{x,y}\frac{|f(x,t)-f(y,t)-f(x,t-\Delta t)+f(y,t+\Delta t)|}{|x-y|^\alpha(\Delta t)^{\alpha/3}}$$
$$\le [f]^{(\alpha,\alpha/3)}.$$

Consequently,

$$[D_x^3 g(x,t)]^{(\alpha,\alpha/3)} \le c[f]^{(\alpha,\alpha/3)}. \tag{24}$$

To estimate the Hölder constant $< D_t g(x,t) >_x^{(\alpha)}$, we again use a representation of the form (18) and an argument analogous to that presented above; furthermore, to estimate a term of the form I_4, we use the equality

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \exp(-\lambda^3 t)\lambda^2 \sin\lambda x d\lambda$$

and the asymptotic expansion

$$\int_0^{+\infty} \exp(-z^3)z^2 \sin yz dz = c(y^{-3} + o(y^{-3})) \quad y \to \infty.$$

As a result, we get

$$\langle D_t g(x,t)\rangle_x^{(\alpha)} \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{25}$$

By using a representation of the form (22), one easily arrives at the estimate

$$\langle D_t g(x,t)\rangle_t^{(\alpha/3)} \le c[\langle f\rangle_x^{(\alpha)} + \langle f\rangle_t^{(\alpha/3)}]. \tag{26}$$

For $n = 3$, we first consider the special case where $a_{11} = a_{22}$ in (8). Then the kernel $K(x_1, x_2, t)$ in (9) admits the following representation (again, without loss of generality, we set $k = ba_{11} = 1$):

$$K(x_1, x_2, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{3/2}t} \cos x_1\lambda_1 \cos x_2\lambda_2 d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$= \int_0^\infty e^{-t|\lambda|^3}|\lambda|d|\lambda| \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x_1|\lambda|\cos\varphi)\cos(x_2|\lambda|\sin\varphi)d\varphi$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-t|\lambda|^3}|\lambda|d|\lambda| \int_0^\pi \cos(|\lambda|r\cos\varphi)d\varphi = 2\Gamma^2(1/2)\int_0^\infty e^{-t\lambda^3}\lambda J_0(\lambda r)d\lambda, \qquad (27)$$

where we set $x_1 = r\cos\psi$, $x_2 = r\sin\psi$, $\lambda_1 = |\lambda|\cos\varphi$, and $\lambda_2 = |\lambda|\sin\varphi$ and use the integral representation of the function $J_0(x)$. For the function

$$K_1(r, t) = \int_0^\infty e^{-t\lambda^3}\lambda J_0(\lambda r)d\lambda = t^{-2/3}\int_0^\infty e^{-z^3} z J_0(zy)dz, \quad y = r/t^{1/3}, \qquad (28)$$

and its derivatives, the asymptotic properties follow from the asymptotic expansion [9, p. 248]

$$\int_0^\infty e^{-z^3} z^{\gamma+1} J_\nu(zy)dz - y^{-\gamma-2}\sum_{n=0}^\infty c_n y^{-n}, \ y \to \infty, \ \nu > -1. \qquad (29)$$

For example, by using the equality

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial x} = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

and (29), we obtain the asymptotic expansion

$$\frac{\partial^3 K(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - \sum_{l=3}^5 c_l r^{5-l} t^{-l/3}[y^{-l} + o(y^{-l})] \quad for \ y \to \infty.$$

Thus, by repeating the calculations made in the case $n = 2$ almost word for word, we also obtain inequalities (21), (23)-(26) in the case $n = 3$ with the kernel $K(x_1, x_2, t)$ determined by (27).

As a consequence of inequalities (21) and (23)-(26), in the case $n = 2$ and in the case $n = 3$ with $a_{11} = a_{22}$, we conclude that, for $f_1 \in \underset{0}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}$ and $f_3 \in \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$, the function $\rho(z', t)$ belongs to $\underset{0}{P}^{4+\alpha}(R'_T)$, and $u^\pm(z, t)$ belongs to $\underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T^\pm)$.

Lemma 1. *For $n = 2$, problem (6) has a unique solution and the following inequality holds:*

$$\|u^+\|_{R_T^+}^{(2+\alpha,\alpha/3)} + \|u^-\|_{R_T^-}^{(2+\alpha,\alpha/3)} + |||\rho|||_{R'_T}^{(4+\alpha)} \le c(\|f^+\|_{R_T^+}^{(\alpha,\alpha/3)} + \|f^-\|_{R_T^-}^{(\alpha,\alpha/3)} + |||f_1|||_{R'_T}^{(1+\alpha,\alpha/3)}$$

$$+|f_3|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} + \|f_4^+\|_{R'_T}^{(2+\alpha,\alpha/3)} + \|f_4^-\|_{R'_T}^{(2+\alpha,\alpha/3)}). \tag{30}$$

For $n = 3$ and $a_{11} \neq a_{22}$, we rewrite the relation determining $\tilde{\rho}$ in (8) in the form

$$\left[1 + \frac{ba_{11}(a_{22}/a_{11} - 1)\lambda_2^2|\lambda|}{k\rho + ba_{11}|\lambda|^3}\right]\tilde{\rho} = \frac{\tilde{F}(\lambda, p)}{kp + ba_{11}|\lambda|^3}. \tag{31}$$

By applying the inverse Fourier and Laplace transformations to equality (31), we obtain the following functional equation for determining $\rho(z', t) \in \underset{0}{P}^{4+\alpha}(R'_T)$:

$$(I + \alpha B)\rho = \Phi(x, t), \;\; \Phi(x, t) \in \underset{0}{P}^{4+\alpha}(R'_T),$$

$$B: \quad \underset{0}{P}^{4+\alpha}(R'_T) \to \underset{0}{P}^{4+\alpha}(R'_T), \tag{32}$$

where α is sufficiently small for a_{22}/a_{11} close to one. Then, as is known, Eq. (33) possesses a unique solution in the indicated class.

Lemma 2. *For $n = 3$ and sufficiently small $a_{22} - a_{11}$, problem (6) has a unique solution and inequality (30) is true.*

5. Investigation of the Linear Problem

In order to prove that the operator A defined in (5) has the inverse operator, we consider system (4) with fixed right-hand sides, namely,

$$-\Delta u^{\pm} = F_0^{\pm}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T^{\pm},$$

$$k\frac{\partial \sigma}{\partial t} + a^+\frac{\partial u^+}{\partial n} - a^-\frac{\partial u^-}{\partial n} = F_1(x, t),$$

$$u^{\pm} - \gamma\sum_{i,j}\frac{1}{D(\omega)}\frac{\partial}{\partial \omega_i}(\mu_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_j}) + \gamma\frac{\sigma(\omega)}{D(\omega)} = \gamma F_3(x, t) + F_4^{\pm}(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T,$$

$$u^{\pm} = F_2^{\pm}(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T^{\pm}, \quad u^{\pm}(x, 0) = 0, \quad \sigma(\omega, 0) = 0, \tag{33}$$

$$F_0^{\pm} \in \underset{0}{E}^{\alpha,\alpha/3}(\bar{\Omega}_T^{\pm}), \quad F_1 \in \underset{0}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T), \quad F_2^{\pm} \in \underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T^{\pm}),$$

$$F_3 \in \underset{0}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T), \quad F_4^{\pm} \in \underset{0}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T).$$

As in the investigation of the model problem, without loss of generality, we can assume that $F_0^{\pm} = 0$, $F_4^{\pm} = 0$, and $F_2^{\pm} = 0$. To show that the operator A^{-1} exists and is bounded, it is necessary to prove the unconditional solvability of system (33) and to estimate its solution. To prove the solvability of system (33), note that the coefficients of the system do not depend on t. After the Laplace transformation with respect to t, we get

$$\Delta\hat{u}^{\pm} = 0, \quad x \in \Omega^{\pm}, \quad \hat{u}^{\pm} = 0, \quad x \in \Gamma^{\pm},$$

$$k\rho + a^{+}\frac{\partial \hat{u}^{+}}{\partial n} - a^{-}\frac{\partial \hat{u}^{-}}{\partial n} = \hat{F}_1(x,p), \tag{34}$$

$$\hat{u}^{\pm} - \gamma\sum_{i,j}\frac{1}{D(\omega)}\frac{\partial}{\partial \omega_i}(\mu_{ij}(\omega)\hat{\sigma}_{\omega_j}) + \gamma\frac{\hat{\sigma}}{D(\omega)} = \gamma\hat{F}_3(x,p), \quad x\in\Gamma.$$

First, let us show that, for $Rep \geq 0$, the homogeneous problem (34) has only the trivial solution. Taking the boundary conditions on $\Gamma^{\pm}$ into account and using the Green formula, we obtain

$$\int\limits_{\Omega^{\pm}} |\nabla \hat{u}^{\pm}|^2 dx = \mp \int\limits_{\Gamma} \hat{u}^{\pm}\frac{\partial \hat{u}^{\pm}}{\partial n} ds.$$

This and the equality $\hat{u}^{+} = \hat{u}^{-}$ in Γ yield

$$a^{+}\int\limits_{\Omega^{+}} |\nabla \hat{u}^{+}|^2 dx + a^{-}\int\limits_{\Omega^{-}} |\nabla \hat{u}^{-}|^2 dx = \gamma k\rho \int\limits_{\Gamma} \hat{\sigma}\left[\frac{1}{D(\omega)}\frac{\partial}{\partial \omega_i}(\mu_{ij}\hat{\sigma}_{\omega_j}) - \frac{\hat{\sigma}}{D(\omega)}\right] ds$$

$$= -\gamma k\rho \int\limits_{\omega} (\mu_{ij}\hat{\sigma}_{\omega_j}\hat{\sigma}_{\omega_i} + \hat{\sigma}^2) d\omega.$$

Recall that $\mu_{ij}(\omega)$ is a positive-definite matrix and, therefore, again with regard for the boundary conditions on $\Gamma^{\pm}$, we conclude that, for $Rep \geq 0$, the last equality is true only for $\hat{u}^{\pm} = 0$, $\hat{\sigma} = 0$.

The problem of conjugation for the given function $\hat{\sigma}(\omega, p)$

$$\Delta u^{\pm} = 0, \quad x \in \Omega^{\pm},$$

$$a^{+}\frac{\partial \hat{u}^{+}}{\partial n} - a^{-}\frac{\partial \hat{u}^{-}}{\partial n} = -kp\hat{\sigma} + \hat{F}_1(x,p) \equiv \hat{f}_1(x,p), \tag{35}$$

$$\hat{u}^{+} = \hat{u}^{-}, \quad x\in\Gamma, \quad \hat{u}^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} = 0$$

has a unique solution. In the special case where $a^{+} = a^{-} = 1$, the following function is a solution of problem (35):

$$\hat{u}(x,p) = \int\limits_{\Gamma} \hat{f}_1(y,p) G(x,y) ds_y,$$

where $G(x,y)$ is the Green function of the Dirichlet problem in the domain $\Omega = \Omega^{+}\cup\Omega^{-}$. In the general case, there exists an operator $G^{\pm}$ such that $\hat{u}^{\pm} \in G^{\pm}\hat{f}_1$, $G^{\pm} : H^{l+\alpha}(\Gamma) \to H^{l+\alpha+1}(\Omega^{+})$, and l is an integer. Denote

$$K\hat{\sigma} = \frac{1}{D(\omega)}\frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\mu_{ij}\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \omega_i}\right) - \frac{\hat{\sigma}}{D(\omega)}.$$

Then, by using the argument presented above, we get

$$\gamma K\hat{\sigma} = \hat{u}^+ - \gamma\hat{F}_3(x,p) = -kpG^+\hat{\sigma} + G^+\hat{F}_1 - \gamma\hat{F}_3(x,p).$$

Let K^{-1} be the inverse of the operator K. Then we can rewrite the last equality in the form

$$\gamma\hat{\sigma} = -kpK^{-1}G^+\hat{\sigma} + K^{-1}G^+\hat{F}_1 - \gamma K^{-1}\hat{F}_3 \tag{36}$$

and consider it as an equation for determining the function $\hat{\sigma}(\omega,p)$. The operator $K^{-1}G^+$ is completely continuous in the Hölder spaces and, according to the results proved above, for $Rep \geq 0$, Eq. (36) possesses only the trivial solution. This implies that the equation under consideration is solvable.

Lemma 3. *Problem (33) has a unique solution for which the following estimate is true:*

$$\|(u^+,u^-,\sigma)\|_{H_\psi} \leq c\|(F_0^+,F_0^-,F_1,F_2^+,F_2^-,F_3,F_4^+,F_4^-)\|_{H_F}. \tag{37}$$

The proof of estimate (37) repeats, in fact, the proof of the a priori Schauder estimate for elliptic equations [10]. Assume that $\eta(x) \in C^\infty(R^n)$ with support in the ball $B_r(x_0)$, and $u^\pm(x,t)$, $\sigma(\omega,t)$ is a solution of problem (33) for which the norms on the left-hand side of inequality (37) are meaningful. After multiplying the relations in (33) by $\eta(x)$, we arrive at relations for the functions $v^\pm(x,t) = u^\pm(x,t)\eta(x)$ and $s(\omega,t) = \sigma(\omega,t)\eta(x)$. With respect to the functions $v^\pm(x,t)$ and $s(\omega,t)$, we obtain a system of the form (33) whose coefficients are found by "freezing" the values of the coefficients of system (33) at the point x_0; in addition, the terms lower in the differential sense are transferred to the right-hand side. Further, it is necessary to consider two cases, namely, $x_0 \in \Omega^+ \cup \Omega^-$ and $x_0 \in \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. In the case where $x_0 \in \Omega^+ \cup \Omega^-$, it suffices to know estimates of volume potentials in $E^{2+\alpha,\alpha/3}$ with density from the space $E^{\alpha,\alpha/3}$, which can be obtained in a rather simple way by using estimates of potentials of this sort in the spaces $C^{l+\alpha}$ [10]. For $x_0 \in \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, we should first pass to local coordinates and then to the coordinates in which the boundary is rectified. If $x_0 \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, to obtain the requires estimates, it is necessary to know estimates in the space $E^{2+\alpha,\alpha/3}$ for potentials of double layer with density from $E^{2+\alpha,\alpha/3}$, which can easily be obtained. Finally, if $x_0 \in \Gamma$, for the functions

$$u^\pm(z,t) = u^\pm(y(z),t) = u^\pm(y,t) = v^\pm(x(y),t) = v^\pm(x,t), \qquad \rho(z',t) = s(\omega,t),$$

where z are coordinates in which the boundary is rectified and y are local coordinates [in addition, we can assume that $(z',z_n) = (\omega,z_n)$], we obtain problem (6) with the right-hand sides $f_i = F_i\eta + \bar{f}_i$, where, e.g.,

$$f_3(z',t) = F_3\eta + \sum_{i,j}\sigma_{\omega_i}\eta\frac{\partial\mu_{ij}(\omega)}{\partial\omega_j} - 2\sum_{i,j}k_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_i}\eta_{\omega_j}$$

$$+\sum_{i,j}(k_{ij}(\omega)-k_{ij}(\omega_0))s_{\omega_i\omega_j}\equiv F_3\eta+\bar{f}_3(z',t) \tag{38}$$

and some "lower" terms are assigned to $\bar{f}_4^{\pm}(z',t)$. To obtain an a priori estimate in this case, we use Lemma 1 or Lemma 2 and estimate additional terms of the form $\bar{f}_i(z,t)$ on the right-hand sides. We also use inequalities described below. For functions with supports in the ball $B_r(x_0)$, the inequalities

$$\langle u\rangle_t^{(\alpha/3)}\le 3^\alpha r^\alpha[u]^{(\alpha,\alpha/3)}, \tag{39}$$

$$[u]^{(\alpha,\alpha/3)}\le r^{1-\alpha}\langle u_x\rangle_t^{(\alpha/3)} \tag{40}$$

hold. Further, for functions that vanish for $t=0$, we have

$$\langle u\rangle_x^{(\alpha)}\le T^{\alpha/3}[u]^{(\alpha,\alpha/3)}. \tag{41}$$

It is easy to verify that

$$[uv]^{(\alpha,\beta)}\le[u]^{(\alpha,\beta)}|v|^{(0)}+\langle u\rangle_x^{(\alpha)}\langle v\rangle_t^{(\beta)}+\langle v\rangle_x^{(\alpha)}\langle u\rangle_t^{(\beta)}+[v]^{(\alpha,\beta)}|u|^{(0)}, \tag{42}$$

and, for every $\varepsilon>0$,

$$[u]^{(\alpha,\beta)}\le\varepsilon\langle u_x\rangle_t^{(\beta)}+c_\varepsilon\langle u\rangle_t^{(\beta)}. \tag{43}$$

For $u\in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/3}$, the inequality

$$[u]^{(\alpha,\alpha/3)}\le T^{(1-\alpha)/3}|u|^{(1+\alpha)} \tag{44}$$

holds. For $u\in H^{l',l'/3}$, we have

$$|u|^{(l)}\le cT^{(l'-l)/3}|u|^{(l')},\quad l'>l. \tag{45}$$

For example, let us estimate one of the terms in (38), namely,

$$\bar{f}_{31}\equiv\sum_{i,j}(k_{ij}(\omega)-k_{ij}(\omega_0))s_{\omega_i\omega_j} \tag{46}$$

in the norm $\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$. Denote one of the terms in sum (46) by $\varphi(\omega)$ and represent it formally as $\varphi(\omega)=(k(\omega)-k(\omega_0))s_{\omega\omega}$. We have

$$\varphi_t(\omega)=(k(\omega)-k(\omega_0))s_{t\omega\omega}=\frac{\partial}{\partial\omega}u_2+u_1,$$

where $u_1=s_tk_{\omega\omega}$, $u_2=(k(\omega)-k(\omega_0))s_{t\omega}-s_tk_\omega$. By the definition of the space $\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$, we get

$$|\varphi|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}}\le|\varphi|^{(2+\alpha)}+\|u_1\|^{(\alpha,\alpha/3)}+\|u_2\|^{(\alpha,\alpha/3)}.$$

By using inequalities of the form $\langle uv\rangle_x^{(\alpha)} \le |u|^{(0)}\langle v\rangle_x^{(\alpha)} + |v|^{(0)}\langle u\rangle_x^{(\alpha)}$, we obtain

$$\langle (k(\omega)-k(\omega_0))D_\omega^4 s\rangle_\omega^{(\alpha)} \le |k(\omega)-k(\omega_0)|^{(0)}\langle D_\omega^4 s\rangle_\omega^{(\alpha)} + |D_\omega^4 s|^{(0)}\langle k(\omega)\rangle_\omega^{(\alpha)}$$
$$\le \frac{1}{2}|||s|||^{(4+\alpha)} + cT^{\alpha/3}|||s|||^{(4+\alpha)},$$

where the factor 1/2 appears due to the choice of the size of the support of the function $\eta(x)$ and to the continuity of the function $k(\omega)$. Further, by analogy, we get

$$\langle (k(\omega)-k(\omega_0))D_\omega^4 s\rangle_t^{(\alpha/3)} \le |k(\omega)-k(\omega_0)|^{(0)}\langle D_\omega^4 s\rangle_t^{(\alpha/3)} \le \frac{1}{2}|||s|||^{(4+\alpha)}.$$

By definition,

$$\|s_t\|^{(\alpha,\alpha/3)} = |s_t|^{(0)} + \langle s_t\rangle_\omega^{(\alpha)} + \langle s_t\rangle_t^{(\alpha/3)} + [s_t]^{(\alpha,\alpha/3)}.$$

By successively applying inequalities (41), (39), and (44), we obtain

$$\|s_t\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le T^{\alpha/3}[s_t]^{(\alpha,\alpha/3)} + 3^\alpha r^\alpha [s_t]^{(\alpha,\alpha/3)} + \varepsilon\langle s_{\omega t}\rangle_\omega^{(\alpha/3)} + c_\varepsilon\langle s_t\rangle_t^{(\alpha/3)}$$

and estimate the last term in this sum by using (39). As a result, we get

$$\|s_t\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le g(r,T)|||s|||^{(4+\alpha)},$$

where $g(r,T) \to$ as $r,T \to 0$. By using inequality (42), one can similarly obtain the estimate

$$\|s_t k_{\omega\omega}(\omega)\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le g(r,T)|||s|||^{(4+\alpha)}.$$

To estimate $\|s_t k_\omega\|^{(\alpha,\alpha/3)}$ and $\|s_{\omega t}(k(\omega)-k(\omega_0))\|^{(\alpha,\alpha/3)}$, we use a similar reasoning. Consequently,

$$|\varphi|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} \le g(r,T)|||s|||^{(4+\alpha)},$$

whence

$$|\bar{f}_{31}|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} \le g(r,T)|||s|||^{(4+\alpha)}.$$

A similar argument can be used for the remaining terms in $\bar{f}_3(z',t)$. Therefore,

$$|f_3|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} \le c|F_3|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} + g(r,T)|||s|||^{(4+\alpha)}.$$

Inequalities (39)-(45) enable us to estimate in a similar way the functions f_i in problem (6) and, as a result, to prove inequality (37) for sufficiently small T. By repeating this reasoning, in finitely many steps, we obtain estimate (37) for any T.

6. Proof of the Theorem on the Existence of a Solution

Let $B_r(\psi) = \{\psi \in H_\psi : \|\psi\|_{H_\psi} \le r\}$, $r \le r_0 \le \infty$, be a ball in the space H_ψ centered at the origin.

Lemma 4. *The following inequalities are true for the right-hand sides of problem (4):*

$$\|F(\varphi_2) - F(\varphi_1)\|_{H_\psi} \le c(T)(\delta(r) + T^{\alpha/3})\|\varphi_2 - \varphi_1\|_{H_\psi},$$

$$\|F(0)\|_{H_\psi} \le c(T)T^{\alpha/3}, \ \varphi_2, \varphi_1 \in B_r, \tag{47}$$

where $\delta(r) \to 0$ *as* $r \to 0$, *and* $c(T)$ *is bounded for* $T \to 0$.

The proof of Lemma 4 is rather cumbersome and, therefore, we consider only one example. Estimates (47), in fact, follow from the fact that the right-hand sides in (4) contain terms lower with respect to the norm of H_ψ and terms that contain products of the components $\varphi = (v^+, v^-, \sigma)$. Consider one of the terms in $F_3(\sigma)$, say,

$$f_k = [k_{ij}^{(k)}(\omega, \rho_k, \rho_{k\omega}) - k_{ij}^{(k)}(\omega, s, s_\omega)]\sigma_{k\omega_i\omega_j}, \quad k = 1, 2.$$

We have

$$f_2 - f_1 = (k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)})\sigma_{2\omega_i\omega_j} + (k_{ij}^{(1)} - k_{ij}^{(2)})(\sigma_{2\omega_i\omega_j} - \sigma_{1\omega_i\omega_j}) \equiv I_1 + I_2,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = \left\{\sigma_{2\omega_i\omega_j}\frac{\partial}{\partial t}[k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}] - \sigma_{2\omega_j}\frac{\partial}{\partial t}[k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}]\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \omega_i}\left\{[k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}]\sigma_{2\omega_j t}\right\} \equiv u_1(\omega, t) + \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_{2i}(\omega, t).$$

By using the smoothness of the functions $k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega)$ with respect to their arguments, we obtain the estimates

$$\|u_1\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le c|||\sigma_2|||^{(4+\alpha)}\|k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le cr|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)},$$

$$\|u_2\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le c|||\sigma_2|||^{(4+\alpha)}\|k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le cr|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)},$$

$$|I_1|^{(2+\alpha)} \le cT^{\alpha/3}|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)}.$$

It follows from similar estimates for $I_2(\omega, t)$ that

$$|f_2 - f_1|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} \le c(r + T^{\alpha/3})|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)}.$$

This completes our consideration of Lemma 4.

Now consider the operator $g_2 : (\theta^+, \theta^-, \sigma) \to (v^+, v^-, \sigma)$ in the space H_ψ, which is bounded by virtue of the definition of the functions $\theta^\pm(x, t)$. Further, consider the operator $g = g_2 \circ g_1$ in the ball $B_r(\psi)$, where $g_1 : B_r \to H_\psi$ associates every $\varphi = (v^+, v^-, \sigma)$ with the element $\psi = (\theta^+, \theta^-, \sigma)$ that is a solution of problem (4) and whose existence and uniqueness are proved in Lemma 3. It is clear that the fixed point of the operator g is a solution of problem (4) and, consequently, of the original problem. It follows from Lemmas 3 and 4 that

$$\|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\|_{H_\psi} \le \delta(r, T)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_\psi},$$

$$\|g(0)\|_{H_\psi} \le c(T)T^{\alpha/3}, \quad \delta(r, T) \to 0 \quad as \quad r, T \to 0. \tag{48}$$

Inequalities (48) guarantee that the operator g is contracting and maps the ball B_r into itself. The statement of Theorem 1 now follows from the principle of contracting mappings.

This work was partially supported by the INTAS-94-2187 project "Nonlinear and Singular Partial Differential Equations and Their Applications".

References

[1] I.I. Danilyuk, "On the Stefan problem", *Usp. Mat. Nauk*, **40**, No. 5, 133–185 (1985).

[2] B.V. Bazalii and S.P. Degtyarev, "On the Stefan problem with kinetic and classical conditions on a free boundary", *Ukr. Math. Zh.,* **44**, No. 2, 155–166 (1992).

[3] B.V. Bazalii and S.P. Degtyarev, "Solvability of the problem with unknown boundary between the domains of definition of parabolic and elliptic equations," *Ukr. Math. Zh.,* **41**, No. 10, 1343–1349 (1989).

[4] X. Chen, "The Hele-Shaw problem and are-preserving curve-shortening motions," *Arch. Ration. Mech. Anal.,* **123**, 117–151 (1993).

[5] V.N. Gusakov and S.P. Degtyarev, "On the existence of a smooth solution of one problem of filtration," *Ukr. Math. Zh.,* **41**, No. 5, 1192–1198 (1989).

[6] E.I. Hanzawa, "Classical solutions of the Stefan problem," *Tohoku Math. J.,* **33**, 297–335 (1981).

[7] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'tseva, *" Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type"* [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

[8] V.A. Solonnikov, "On the solvability of the problem of motion of a viscous incompressible liquid bounded by a free surface," *Izv. Akad Nauk SSSR, Ser. Mat.,* **41**, No. 6, 1388–1424 (1977).

[9] M.V. Fedoryuk, *Asymptotics, Integrals, and Series* [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

[10] O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva, *" Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type"* [in Russian], Nauka, Moscow (1964).

REGULARITY OF THE SOLUTION OF THE FREE BOUNDARY PROBLEM FOR THE EQUATION $v_t = (v^m)_{xx}$

*St. Petersburg Math. J.–2001,–**12**, №2*

INTRODUCTION

In this paper we study the smoothness properties of the solution of the free boundary problem for the nonlinear porous media equation; we do this locally in time. There exists extensive bibliography (see [1]) pertaining to the qualitative properties of solutions of this equation. Let $v(x,t)$ be a solution of the Cauchy problem

$$v_t = (v^m)_{xx}, \quad (x,t) \in R \times (0,T); \quad v(x,0) = v_0(x) \geq 0.$$

Since the above equation degenerates on the set $\{v(x,t) = 0\}$, for $m > 1$ a perturbation is known to propagate at a finite speed. This means that at every moment the support of the solution is bounded if the initial function $v(x,0)$ is nonnegative and has bounded support. Thus, a boundary (interface) arises between the domains $\{v(x,t) > 0\}$ and $\{v(x,t) = 0\}$. This free boundary is described by the functions $x = \sigma(t) = \sup_x\{v(x,t) > 0\}$ and $x = \eta(t) = \inf_x \{v(x,t) > 0\}$. In [2-5], some results on the regularity of the functions $\sigma(t)$, $\eta(t)$ were obtained in the case of one spatial variable. In these investigations, regularity properties of the free boundary were studied for $t > 0$; this required only minimal assumptions on the smoothness of the initial data. Our aim in this paper is to describe some regularity properties of the free boundary on the segment $[0,t]$, where t is sufficiently small, for a certain boundary value problem that models the Cauchy problem. In this connection, we note that on the free boundary $x = \sigma(t)$ the solution of the Cauchy problem satisfies, e.g., the conditions

$$v(\sigma(t),t) = 0, \quad \sigma_t = -\frac{m}{m-1}(v^{m-1}(x,t))_x|_{x=\sigma(t)}.$$

In the problem to be treated we preserve these conditions on the free boundary; since the regularity properties of the free boundary are determined by local properties of the solution near the free boundary, our results are closely related to the description of the free boundary for the Cauchy problem. Moreover, the method proposed below makes it possible to regard the Cauchy problem as the initial boundary value problem for the porous media equation in an unknown domain $x \in (\eta(t), \sigma(t))$. This would lead to similar results on the regularity of free boundaries, but would require more work.

Our analysis yields the following result. Suppose that the initial function $v_0(x)$ satisfies some compatibility and monotonicity conditions and that the functions v_{0x},

$(x-\sigma(0))v_{0xx}$ are of class H^α in a neighborhood of the point $\sigma(0)$. Then the free boundary $x=\sigma(t)$ is a smooth curve of class $H^{1+\beta}([0,T])$ ($\beta<\alpha/2$) for all sufficiently small T. (Here H^l, with l nonintegral, is the Hölder space of functions.) Moreover, the smoothness of the free boundary improves if so does the smoothness of the initial function.

Our method is based on passage from the problem in an unknown domain to a problem in a fixed domain followed by reduction to finding the fixed points of a certain nonlinear operator. The main analytic difficulties are overcome when we study the corresponding linear problem for a degenerate parabolic equation of the form $v_t=xv_{xx}+sv_x+f(x,t)$, $s>0$, in the domain $x\in(0,l)$. The results on the solvability of this problem, as described in Theorem 2, are of independent interest.

§1 SETTING OF THE PROBLEM, AND THE MAIN RESULT

We want to find functions $v(z,t)$ and $\sigma(t)$ that satisfy the conditions

$$v_t=(v^m)_{zz},\quad m>1,\quad 0<z<\sigma(t),\quad 0<t<T;$$

$$v(\sigma(t),t)=0,\quad \sigma_t=-\frac{m}{m-1}(v^{m-1})_z(\sigma(t),t),\quad 0<t<T;$$

$$v(0,t)=1,\quad \sigma(0)=\sigma_0>0,\quad v(z,0)=v_0(z),\quad z\in(0,\sigma_0).$$

Rewriting this as a problem for the "pressure" function $u=v^{m-1}(z,t)$, we obtain

$$u_t=muu_{zz}+\frac{m}{m-1}u_z^2,\ 0<z<\sigma(t),\ 0<t<T;$$

$$u(\sigma(t),t)=0,\ \sigma_t=-\frac{m}{m-1}u_z(\sigma(t),t),\ 0<t<T; \tag{1}$$

$$u(0,t)=1,\ \sigma(0)=\sigma_0>0;\ u(z,0)=u_0(z)=v_0^{m-1}(z),\ z\in(0,\sigma_0).$$

We assume that the initial function in (1) satisfies the first order compatibility conditions and the condition

$$-\infty<\frac{\partial u_0}{\partial z}(z)\le-\delta,\ \delta>0. \tag{2}$$

There are several ways of reducing the free boundary problem (1) to a problem in a fixed domain. In our case it is convenient to use the godograph transformation, i.e., to pass to the new unknown function $z=z(u,t)$ determined by the identity $u=u(z,t)$. At least for t small, this transformation if condition (2) is satisfied. We note that condition (2) of strong monotonicity of $u_0(z)$ in z can be replaced by the less restrictive condition $\partial u_0/\partial z(\sigma_0)<0$; this would require another method of reduction of the free boundary problem to a problem in a fixed domain (see [6]). The proof of our main result would not change fundamentally, but it would require much more space. The condition $\partial u_0/\partial z(\sigma_0)<0$ eliminates what is called "waiting time" for the solution, i.e., the time when the free boundary does not move.

Let $\Omega_T = \{(u,t):\ 0<u<1,\ 0<t<T\}$. It can be checked that the function $z(u,t)$ satisfies the relations

$$\begin{gathered}
z_u^2 z_t = muz_{uu} - \frac{m}{m-1} z_u, \quad (u,t)\in\Omega_T;\\
z_u z_t = -\frac{m}{m-1},\ u=0,\ 0<t<T;\\
z(1,t)=0, \quad 0<t<T;\\
z(u,0)=z_0(u), \quad u\in(0,1),
\end{gathered} \tag{3}$$

where $z_0(u)$ is the function inverse to $u_0(z)$. Clearly, the free boundary is represented as $\sigma(t)=z(0,t)$.

Condition (2) and the compatibility conditions for the problem (3) take the form

$$\begin{gathered}
-1/\delta \le \frac{\partial z_0}{\partial u}(u) < 0, \quad u\in[0,1];\\
z_{0u}(0)z_t(0,0) = -\frac{m}{m-1}, \quad z_t(0,0) = z_{0u}^{-2}\left(muz_{0uu} - \frac{m}{m-1}z_{0u}\right)_{u=0},\\
z_0(1)=0, \quad \left[mz_{0uu} - \frac{m}{m-1}z_{0u}\right]_{u=1} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

For the smooth solutions of (3), the boundary condition at $u=0$ is equivalent to the condition $uz_{uu}(u,t)|_{u=0}=0$.

Let $\Omega\subset R$, $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$. We denote by $H^{\alpha,\alpha}(\bar\Omega_T)$ and $P^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar\Omega_T)$ the spaces obtained by closure of the set of infinitely differentiable functions with respect to the norms

$$|z|^{(\alpha,\alpha)}_{\bar\Omega_T} = \max_{\bar\Omega_T}|z(x,t)| + \langle z\rangle^{(\alpha)}_{x,\bar\Omega_T} + \langle z\rangle^{(\alpha)}_{t,\bar\Omega_T},$$

$$\|z\|^{(2+\alpha,1+\alpha)}_{\bar\Omega_T} = \max_{\bar\Omega_T}|z(x,t)| + |z_t|^{(\alpha,\alpha)}_{\bar\Omega_T} + |xz_{xx}|^{(\alpha,\alpha)}_{\bar\Omega_T} + |z_x|^{(\alpha,\alpha)}_{\bar\Omega_T},$$

respectively; here

$$\langle z\rangle^{(\alpha)}_{x,\bar\Omega_T} = \sup_{x,x',t}\frac{|z(x,t)-z(x',t)|}{|x-x'|^\alpha}, \quad \langle z\rangle^{(\alpha)}_{t,\bar\Omega_T} = \sup_{x,t',t}\frac{|z(x,t)-z(x,t')|}{|t-t'|^\alpha}.$$

Let $\underset{0}{H}{}^{\alpha,\alpha}(\bar\Omega_T)$ ($\underset{0}{P}{}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar\Omega_T)$) be the subspace of $H^{\alpha,\alpha}(\bar\Omega_T)$ ($P^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar\Omega_T)$) formed by the elements equal to zero (together with the time derivative) for $t=0$.

Also, we shall use the space of Hölder functions $H^l(\bar\Omega)$ and $H^{l,l/2}(\bar\Omega_T)$, where l is nonintegral (for the definitions, see [7, Chapter 1]), as well as the corresponding spaces $\underset{0}{H}{}^{l,l/2}(\bar\Omega_T)$.

The leading seminorm in $P^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$ is

$$\langle\langle z\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{\bar{\Omega}_T} = \langle z_t\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{\bar{\Omega}_T} + \langle xz_{xx}\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{\bar{\Omega}_T} + \langle z_x\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{\bar{\Omega}_T},$$

where

$$\langle z\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{\bar{\Omega}_T} = \langle z\rangle^{(\alpha)}_{x,\bar{\Omega}_T} + \langle z\rangle^{(\alpha)}_{t,\bar{\Omega}_T}$$

is the leading seminorm in the space $H^{\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_T)$, $\alpha < 1$.

Let $E^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ be the space of functions with the norm

$$\|z\|^{(2+\alpha)}_{\bar{\Omega}} = \max_{\bar{\Omega}}|z| + |xz_{xx}|^{(\alpha)}_{\bar{\Omega}} + |z_x|^{(\alpha)}_{\bar{\Omega}}$$

and with the leading seminorm

$$\langle\langle z\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{\bar{\Omega}} = \langle xz_{xx}\rangle^{(\alpha)}_{x,\bar{\Omega}} + \langle z_x\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{x,\bar{\Omega}}.$$

Here $|z|^{(\alpha)}_{\Omega} = \max_{\bar{\Omega}}|z| + \langle z_x\rangle^{(\alpha)}_{x,\bar{\Omega}}$ is the norm in $H^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

Our main result is as follows.

Theorem 1.1. *Suppose that $z_0(u) \in E^{2+\alpha}([0,1])$ and that conditions (4) are fulfilled. Then for sufficiently small T, $0 < T < T_0$ with T_0 depending on the data of the problem (3), this problem admits a unique solution $z \in P^{2+\beta,1+\beta}(\bar{\Omega}_T)$ with $0 < \beta < \alpha/2$; consequently, $\sigma(t) \in H^{1+\beta}([0,T])$.*

§2 AN AUXILIARY PROBLEM

Let L_s be the differential operator defined by the formula

$$L_s w = x^{1-s}(x^s w_x)_x = xw_{xx} + sw_x.$$

Let $s > 0$, a, b be arbitrary parameters. We consider the problem

$$L_s w = f(x), \quad x \in (0,l); \quad x^s w_x|_{x=0} = a, \quad w(l) = b. \tag{5}$$

In terms of the functions

$$w_{(s)}(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-s}}{1-s}, & \text{if } s \neq 1, \\ \ln x, & \text{if } s = 1, \end{cases}$$

$$w_{(f)}(x) = \int_0^x y^{-s}dy \int_0^y \xi^{s-1} f(\xi)d\xi,$$

the solution of the problem (5) is of the form

$$w(x) = b + a(w_{(s)}(x) - w_{(s)}(l)) + w_{(f)}(x) - w_{(f)}(l).$$

It is easily seen that

$$\frac{dw_{(f)}}{dx} = x^{-s}\int_0^x \xi^{s-1} f(\xi)d\xi = \int_0^1 y^{s-1} f(xy)dy,$$

so that $w'_{(f)}(0) = f(0)/s$, and from the equation we deduce that $\lim_{x\to 0} xw''_{(f)}(x) = 0$. Thus, for the function $w_{(f)}(x)$ the conditions $x^s w'_{(f)}(x)|_{x=0} = 0$ and $xw''_{(f)}(x)|_{x=0} = 0$ are equivalent.

Lemma 2.1. *Let $a = 0$, let b be an arbitrary parameter, and let $s > 0$. If $f \in H^\alpha([0,l])$, then the problem (5) admits a unique smooth solution $w \in E^{2+\alpha}([0,l])$, and*

$$\|w\|^{(2+\alpha)}_{[0,l]} \le c(|f|^{(\alpha)}_{[0,l]} + b).$$

Moreover, $\lim_{x\to 0} xw_{xx}(x) = 0$.

In the proof of uniqueness, it suffices to assume that the function $w(x)$ is absolutely continuous and that the integral

$$\int_0^l x^s |w_x(x)|^2 dx$$

is bounded. Indeed, let $\tilde{w} = w_1 - w_2$, where w_1, w_2 are two different solutions of (5); then

$$L_s\tilde{w} = 0, \quad x \in (0,l); \quad x^s\tilde{w}_x|_{x=0} = 0, \quad \tilde{w}(l) = 0.$$

Multiplying the equation $L_s\tilde{w} = 0$ by $x^{s-1}\tilde{w}(x)$ and integrating by parts, we obtain

$$\int_0^l x^s|\tilde{w}_x(x)|^2 dx = 0,$$

whence $\tilde{w}(x) = 0$.

§3 A MODEL PROBLEM

We consider the problem

$$Lu = u_t - xu_x - su_x = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T = \{x \in R_+,\ t \in (0,T)\};$$

$$x^s u_x|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T); \quad u(x,0) = 0, \quad x \in R_+, \tag{6}$$

where the function $f(x,t) \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(\bar{D}_T)$ has compact support with respect to x. The solution of (6) can be represented in the form of the volume potential:

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi.$$

In order to find the kernel G, we apply the Laplace transformation with respect to t, denoting the resulting transforms by $\hat{u}$ and $\hat{f}$. The problem (6) takes the form

$$p\hat{u}(x,p) - x\hat{u}_{xx}(x,p) - s\hat{u}_x(x,p) = \hat{f}(x,p);$$

$$x^s\hat{u}_x(x,p)|_{x=0} = 0, \quad \mathrm{as}\hat{u}(x,p) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

The solutions of the homogeneous equations of this type are representable in terms of Bessel functions (see [8, p. 985, 8.491(6)]). Next, it is possible to construct the Green function for the nonhomogeneous problem and to apply the inverse Laplace transformation. As a result, we obtain the Green function for the problem (6); this function looks like this:

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{1}{t-\tau}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} \exp\left(-\frac{x+\xi}{t-\tau}\right) I_{-q}\left(2\frac{\sqrt{x\xi}}{t-\tau}\right), \quad q = 1-s,$$

where $I_{-q}(x)$ is the Bessel function of an imaginary argument (see also [9, Chapter 3]).

3.1 Estimates for the Green function. Using [8, formula (6.6433(2))], it is easy to check that the Green function satisfies the relation

$$\int_0^\infty G(x,\xi,t)d\xi = 1. \tag{7}$$

Lemma 3.1. *For the above Green function, we have*

$$|D_t^r G(x,\xi,t)| \le c\frac{u^{-2q}}{t^{1+r}} e^{-\gamma(u-v)^2} \begin{cases} 1, & \text{if } \ 0 < 2uv < 1, \\ (2uv)^{q-1/2}, & \text{if } \ 2uv \ge 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$|D_t^r D_x G(x,\xi,t)| \le c\frac{u^{-2q}}{t^{2+r}} e^{-\gamma(u-v)^2} \begin{cases} (1+u^2), & \text{if } \ 0 < 2uv < 1, \\ (2uv)^{q-1/2}(1+u/v), & \text{if } \ 2uv \ge 1, \end{cases} \tag{9}$$

where $u = (\xi/t)^{1/2}$, $v = (x/t)^{1/2}$, $\gamma \in (0,1)$.

Proof. We use the following well-known asymptotics of the function $I_{-q}(z)$:

$$I_{-q}(z) \le \begin{cases} cz^{-q}, & \text{if } \ z < 1, \\ c_1 e^z(z^{-1/2} + c_2(q)z^{-3/2}), & \text{if } \ z \ge 1, \end{cases} \tag{10}$$

and also the identity

$$\frac{d}{dz}(z^q I_{-q}) = z^q I_{-q+1}(z). \tag{11}$$

Representing the Green function in the form

$$G(x,\xi,t) = 2^{-q}t^{-1}u^{-2q}e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^q I_{-q}(2uv)$$

and using (11), we obtain

$$G_x(x,\xi,t) = 2^{-q}t^{-1}u^{-2q}e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^q\left[\frac{u}{v}I_{-q+1}(2uv) - I_{-q}(2uv)\right].$$

Combining this with (10), we deduce estimate (9) for $r = 0$.

For the time derivative of the function $G(x, \xi, t)$ we have

$$G_t(x,\xi,t) = 2^{-q}t^{-2}u^{-2q}e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^q[(q-1)I_{-q}(2uv) - 2uvI_{1-q}(2uv)$$
$$+(u^2+v^2)I_{-q}(2uv)] = 2^{-q}t^{-2}u^{-2q}e^{-(u^2+v^2)}(2uv)^q[(q-1)I_{-q}(2uv)$$
$$+(u-v)^2I_{-q}(2uv) - 2uv(I_{1-q}(2uv) - I_{-q}(2uv))].$$

Using estimates (10) once again, and also inequalities of the form

$$\exp(-u^2-v^2) \le c\exp[-(u-v)^2], \quad u \ge 0, v \ge 0,$$

$$z\exp(-z) \le c\exp(-z/2), \quad z \ge 0,$$

we get

$$|(u-v)^2e^{-(u^2+v^2)}I_{-q}(2uv)| \le c\begin{cases} e^{-(u-v)^2/2}(2uv)^{-1/2} & \text{if } 2uv \ge 1, \\ e^{-(u-v)^2}(2uv)^{-q} & \text{if } 0 < 2uv \le 1, \end{cases}$$

$$|2uve^{-(u^2+v^2)}(I_{1-q}(2uv) - I_{-q}(2uv))| \le ce^{-(u-v)^2}\begin{cases} (2uv)^{-1/2} & \text{if } 2uv \ge 1, \\ (2uv)^{-q} & \text{if } 0 < 2uv \le 1. \end{cases}$$

This yields inequality (8) for $r = 1$. The remaining estimates in (8) and (9) can be proved in a similar way. □

Lemma 3.2. *The Green function $G(x, \xi, t)$ satisfies the inequalities*

$$\int_0^\infty |D_t^r G(x,\xi,t)|d\xi \le ct^{-r}, \quad r \ge 0, \tag{12}$$

$$\int_0^\infty |uG(x,\xi,t)|d\xi \le c\max(1,v), \quad u = (\xi/t)^{1/2}, \quad v = (x/t)^{1/2}. \tag{13}$$

Proof. First, we observe that, for $\alpha > -1$,

$$J_1(v) = \int_{1/2v}^\infty u^\alpha e^{-\gamma(u-v)^2}du \le c\begin{cases} v^\alpha & \text{if } v \ge 1, \\ e^{-\gamma/16v^2} & \text{if } v \le 1, \end{cases} \tag{14}$$

$$J_2(v) = \int_0^{1/2v} u^\alpha e^{-\gamma(u-v)^2}du \le c\begin{cases} e^{-\gamma v^2} & \text{if } v \ge 1, \\ 1 & \text{if } v \le 1. \end{cases} \tag{15}$$

For the proof, we consider, for instance, $J_1(v)$. We have

$$J_1(v) = \int_{-v+1/2v}^\infty (\xi+v)^\alpha e^{-\gamma\xi^2}d\xi \le \int_{-v+1/2v}^\infty e^{-\gamma\xi^2/2}\max[(\xi+v)^\alpha e^{-\gamma\xi^2/2}]d\xi.$$

It can be checked that $\max[(\xi+v)^\alpha e^{-\gamma\xi^2/2}] \le cv^\alpha$ if $v>1$ and $\xi \in (-v+1/2v, \infty)$, so that

$$J_1(v) \le cv^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\xi^2/2} d\xi \le cv^\alpha.$$

For $v \le 1$ in the integral $J_1(v)$ we change the variables $2uv = z$, obtaining

$$\begin{aligned} J_1(v) &= 2^{-\alpha-1} v^{-\alpha-1} \int_1^\infty z^\alpha \exp\left[-\gamma\left(\frac{z^2}{4v^2} - z + v^2\right)\right] dz \\ &\le cv^{-\alpha-1} e^{-\gamma v^2} e^{-\gamma/8v^2} \int_1^\infty z^\alpha \exp\left[-\gamma\frac{z^2}{8v^2} + \gamma z\right] dz \\ &\le ce^{-\gamma/16v^2} \int_1^\infty z^\alpha \exp\left[-\gamma\frac{z^2}{8} + \gamma z\right] dz \\ &\le ce^{-\gamma/16v^2}. \end{aligned}$$

Inequalities (15) are proved in a similar way. In order to prove (12), we apply estimates (8), (14), (15) consecutively. This yields

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |D_t^r G(x,\xi,t)| d\xi \\ &\le ct^{-r} \int_0^{1/2v} u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2} du + ct^{-r} \int_{1/2v}^\infty u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2} (uv)^{q-1/2} du \\ &\le ct^{-r}. \end{aligned}$$

Application of the same estimates shows that

$$\int_0^\infty |uG(x,\xi,t)| d\xi \le c(v + e^{-\gamma v^2}) \le c\max(1,v),$$

which proves (13). □

3.2. Estimation of the volume potential. Before writing out a representation for the time derivative of the volume potential, we prove the following fact: for any $x \in R_+$, $t \in (0,T)$, if $f(x,t)$ is a function with compact support, then

$$\lim_{\tau\to+\infty} \int_0^\infty G(x,\xi,\tau) f(\xi,t) d\xi = 0. \tag{16}$$

Indeed, from (10) it follows that

$$|G(x,\xi,\tau)| \le \frac{c}{\tau}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} \exp\left(-\frac{x+\xi}{\tau}\right) \begin{cases} \frac{(x\xi)^{-q/2}}{\tau^{-q}}, & \text{if } 0 < 2\sqrt{x\xi}/\tau < 1, \\ \exp\left[2\sqrt{x\xi}/\tau\right], & \text{if } 2\sqrt{x\xi}/\tau \ge 1, \end{cases}$$

$$\leq c \left\{ \begin{array}{ll} \tau^{-s}\xi^{s-1}, & \text{if } \ 0 < 2\sqrt{x\xi}/\tau < 1, \\ \tau^{-s-1}\xi^{s-1/2}x^{1/2}, & \text{if } \ x^{-1/2} \leq 2\xi^{1/2}/\tau. \end{array} \right.$$

Consequently, for $\tau \geq 1$ we have

$$|G(x, \xi, \tau)| \leq c\tau^{-s}(1 + x^{1/2}) \max\{\xi^{s-1}, \xi^{s-1/2}\}.$$

Since $f(x, t)$ has compact support, we obtain

$$\left| \int_0^\infty G(x, \xi, \tau) f(\xi, t) d\xi \right|$$

$$\leq c\tau^{-s}(1 + x^{1/2}) \max \left\{ \int_0^\infty \xi^{s-1} |f(\xi, t)| d\xi, \int_0^\infty \xi^{s-1/2} |f(\xi, t)| d\xi \right\}$$

$$\leq c\tau^{-s}(1 + x^{1/2}),$$

which implies (16).

If $f(x, t) \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(\bar{D}_T)$, this function extends to $t < 0$ with preservation of the regularity class; therefore, the volume potential can be written as

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi. \tag{17}$$

Let h be an arbitrary positive number. The sequence of functions

$$u_h(x, t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi.$$

converges to $u(x, t)$. We have

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x, \xi, t - \tau)(f(\xi, \tau) - f(\xi, t)) d\xi$$

$$+ \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x, \xi, t - \tau) f(\xi, t) d\xi + \int_0^\infty G(x, \xi, h) f(\xi, t - h) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x, \xi, t - \tau)(f(\xi, \tau) - f(\xi, t)) d\xi + \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\infty G(x, \xi, \tau) f(\xi, t) d\xi$$

$$+ \int_0^\infty G(x, \xi, h)(f(\xi, t - h) - f(\xi, t)) d\xi.$$

The last term in this sum is estimated with the help of (12) with $r = 0$:

$$\left| \int_0^\infty G(x, \xi, h)(f(\xi, t - h) - f(\xi, t)) d\xi \right| \leq c\langle f \rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.$$

Thus, taking (16) into account and passing to the limit as $h \to 0$, we see that

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t-\tau)(f(\xi,\tau) - f(\xi,t))d\xi \tag{18}$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty G_\tau(x,\xi,\tau)(f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t))d\xi. \tag{19}$$

Lemma 3.3. *For the potential (19) we have*

$$\langle u_t\rangle_x^{(\alpha)} \le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)}. \tag{20}$$

Proof. We write

$$\begin{aligned} &u_t(x+h,t) - u_t(x,t) \\ &= \int_0^h d\tau \int_0^\infty G_\tau(x+h,\xi,\tau)[f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]d\xi \\ &- \int_0^h d\tau \int_0^\infty G_\tau(x,\xi,\tau)[f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]d\xi \\ &+ \int_h^\infty d\tau \int_0^\infty [G_\tau(x+h,\xi,\tau) - G_\tau(x,\xi,\tau)][f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]d\xi \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

The integrals I_1 and I_2 are estimated as above, with the use of (12). For instance,

$$|I_1| \le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_0^h \tau^{\alpha-1} d\tau \le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.$$

For the term I_3 we have

$$|I_3| = \left| \int_h^\infty d\tau \int_0^\infty \left(\int_0^h G_{\tau\sigma}(x+\sigma,\xi,\tau)d\sigma \right) [f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]d\xi \right|$$

$$\le \langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_h^\infty d\tau \int_0^h d\sigma \int_0^\infty |G_{\tau\sigma}(x+\sigma,\xi,\tau)| \tau^\alpha d\xi.$$

Putting $\xi = u^2\tau$, denoting $v = \sqrt{x+\sigma}\,\tau^{-1/2}$, and using (9), we obtain

$$|I_3| \le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int_0^h d\sigma \int_0^{1/2v} u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2}(1+u^2)du$$

$$+c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int_0^h d\sigma \int_{1/2v}^\infty u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2}(1+u/v)(uv)^{q-1/2} du$$

$$= I_3^{(1)} + I_3^{(2)}.$$

Inequality (15) shows that the first term on the right admits the estimate

$$|I_3^{(1)}| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int_0^h \exp\{-\gamma v^2\}|_{v=\sqrt{x+\sigma}\tau^{-1/2}} d\sigma$$

$$\leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h \int_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha,$$

and from (14) it follows that

$$|I_3^{(2)}| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int_0^h d\sigma \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.$$

This completes the proof of Lemma 3.3. □

Lemma 3.4. *The potential (18) satisfied the estimate*

$$\langle u_t\rangle_t^{(\alpha)} \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)}. \tag{21}$$

Proof. We have

$$u_t(x, t+h) - u_t(x,t)$$

$$= \int_{t-h}^{t+h} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t+h-\tau)[f(\xi,\tau) - f(\xi,t+h)]d\xi$$

$$- \int_{t-h}^{t} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(\xi,t)]d\xi$$

$$+ \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty [G_t(x,\xi,t+h-\tau) - G_t(x,\xi,t-\tau)][f(\xi,\tau) - f(\xi,t)]d\xi$$

$$+ \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t+h-\tau)[f(\xi,t) - f(\xi,t+h)]d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^4 I_k.$$

The first three terms are estimated with the help of (12):

$$|I_1| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_{t-h}^{t+h} d\tau |t+h-\tau|^{\alpha-1} \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha,$$

$$|I_2| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_{t-h}^{t} d\tau |t-\tau|^{\alpha-1} \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha,$$

$$|I_3| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_{-\infty}^{t-h} d\tau |t-\tau|^\alpha \int_0^h d\sigma \int_0^\infty |G_{\theta\theta}(x,\xi,\theta)|_{\theta=t-\tau+\sigma} d\xi$$

$$\leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_{-\infty}^{t-h} d\tau |t-\tau|^\alpha \int_0^h (t-\tau+\sigma)^{-2} d\sigma \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.$$

In I_4 we interchange the integrals and then use (16) and (12). As a result, we get

$$|I_4| = \left| \int_0^\infty d\xi [f(\xi,t) - f(\xi,t+h)] \int_{2h}^\infty G_\tau(x,\xi,\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \int_0^\infty |f(\xi,t) - f(\xi,t+h)||G(x,\xi,2h)| d\xi$$

$$\leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.$$

These estimates prove inequality (21). □

Now we show that the volume potential $u(x,t)$ satisfies the boundary condition of the problem (6) at the point $x=0$. Since

$$\int_0^\infty G_x(x,\xi,t) d\xi = 0$$

by (7), we have

$$u_x(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G_x(x,\xi,t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)] d\xi. \quad (22)$$

Let $D_{R,T} = \{(x,t) : \ (x,t) \in D_T, \ 0 < x < R\}$.

Lemma 3.5. *For the potential (22) we have*

$$\max_{D_{R,T}} |u_x(x,t)| \leq c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (T^\alpha + R^{\alpha/2} T^{\alpha/2}). \quad (23)$$

Proof. In the integral (22) we make the change of variables $u^2 = \xi/(t-\tau)$. Denoting $v^2 = x/(t-\tau)$ and using (9) with $r=0$, we get

$$|u_x(x,t)| \leq c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_0^{1/2v} u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2}$$

$$\times (1+u^2)|u^2-v^2|^\alpha du + c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_{1/2v}^\infty u^{1-2q} (uv)^{q-1/2}$$

$$\times e^{-\gamma(u-v)^2} (1+u/v)|u^2-v^2|^\alpha du = c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (I_1 + I_2).$$

Since $z^\alpha \exp(-z^2) \leq c \exp(-z^2/2)$, estimate (15) implies that

$$|I_1| \leq c \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_0^{1/2v} u^{1-2q} (1+u^2)(u+v)^\alpha e^{-\gamma(u-v)^2/2} du$$

$$\leq c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \int_0^{1/2v} u^{1-2q}(1+u^2)\max(u^\alpha, v^\alpha)e^{-\gamma(u-v)^2/2}du$$

$$\leq c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\max(1, v^\alpha)e^{-\gamma v^2/2}d\tau \leq c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau$$

$$\leq ct^\alpha.$$

Estimating I_2 with the help of (14), we get

$$|I_2| \leq c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{x}{t-\tau}\right)^{\alpha/2} d\tau \leq cx^{\alpha/2}t^{\alpha/2}.$$

This proves (23). □

Estimate (23) shows that for the function $u(x,t)$ we have

$$\lim_{x\to 0} x^s u_x(x,t) = 0.$$

For every t, the function $u(x,t)$ can be viewed as a solution of the problem

$$xu_{xx} + su_x = u_t - f(x,t) = F(x,t).$$

The same arguments as in the proof of Lemma 2.1 yield

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \leq c\langle F\rangle^{(\alpha,\alpha)}.$$

Therefore, by Lemmas 3.3 and 3.4, we have

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \leq c\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}. \tag{24}$$

Thus, combining Lemmas 2.1, 3.3 and 3.4 and inequality (24), we arrive at the following statement.

Proposition 3.1. *For the solution $u(x,t)$ of the model problem we have*

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{D_T}^{(2+\alpha)} \leq c\langle f\rangle_{D_T}^{(\alpha,\alpha)}, \tag{25}$$

and

$$\lim_{x\to 0} xu_{xx}(x,t) = 0.$$

We shall need an estimate for the Hölder constant of the function $u_x(x,t)$ off a neighborhood of the point $x = 0$. Let $\varepsilon \in (0,1]$; we put $R(-\varepsilon) = (\varepsilon, \infty)$, $D(-\varepsilon)_T = R(-\varepsilon) \times (0,T)$, $T \leq \varepsilon < 1$.

Lemma 3.6. *On the set $D(-\varepsilon)_T$, the solution of the problem (6) satisfies the estimate*

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \leq cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}. \tag{26}$$

Proof. We introduce an infinitely differentiable function $\chi(x)$ such that

$$\chi(x) = 0, \quad x \in [0, \varepsilon/2]; \quad \chi(x) = 1, \quad x \in [\varepsilon, \infty); \quad |D^r \chi(x)| \le c(r)/\varepsilon^r,$$

and consider the function $v(x,t) = \chi(x)u(x,t)$. Since $v(x,t) = 0$ for $x \le \varepsilon/2$, we may assume that $v(x,t)$ is the solution of the Cauchy problem

$$v_t - \varepsilon v_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in R \times (0,T); \quad v(x,0) = 0, \quad x \in R,$$

where

$$F(x,t) = (su_x + f)\chi(x) + \frac{x-\varepsilon}{x}\chi(x) x u_{xx} - \varepsilon(2u_x \chi(x) + u\chi_{xx}(x)).$$

The results of [7, Chapter 4, §2] show that the solution $v(x,t)$ of this Cauchy problem belongs to the space $\underset{0}{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(R_T)$; moreover, in our case we have the estimates

$$\langle v_x \rangle_t^{((1+\alpha)/2)} \le \frac{c}{\varepsilon^{1/2}} \langle F \rangle_t^{(\alpha)}, \tag{27}$$

$$\langle v_{xx} \rangle_t^{(\alpha)} \le \frac{c}{\varepsilon} \langle F \rangle_t^{(\alpha)}. \tag{28}$$

Using the form of the function $F(x,t)$, we deduce that

$$\langle F \rangle_t^{(\alpha)} \le c(\langle f \rangle_t^{(\alpha)} + \langle u_x \rangle_t^{(\alpha)} + \langle x u_{xx} \rangle_t^{(\alpha)} + \varepsilon^{-1} \langle u \rangle_t^{(\alpha)}).$$

It is well known that if $u(x,t) \in \underset{0}{H}^{\beta,\beta}(\bar{\Omega}_T)$ and $\alpha < \beta$, then

$$\langle u \rangle^{(\alpha,\alpha)} \le c T^{\beta-\alpha} \langle u \rangle^{(\beta,\beta)}, \tag{29}$$

and if $u(x,t) \in \underset{0}{H}^{l,l/2}(\bar{\Omega}_T)$ and $l' < l$, then

$$\langle u \rangle^{(l')} \le c T^{(l-l')/2} \langle u \rangle^{(l)}, \tag{30}$$

Moreover, if $u(x,t) \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$, then we have

$$\langle u \rangle_x^{((1+\alpha)/2)} \le c T^{(1+\alpha)/4} (\langle u \rangle_t^{((1+\alpha)/2)} + \langle u_x \rangle_t^{(\alpha/2)}). \tag{31}$$

Using (25), (29), and the condition $T \le \varepsilon$, we obtain

$$\langle F \rangle_t^{(\alpha)} \le c \langle f \rangle^{(\alpha,\alpha)}.$$

Since $u(x,t) = v(x,t)$ for $x \in R(-\varepsilon)$, from (27) we deduce that

$$\langle u_x \rangle_{t,D(-\varepsilon)_T}^{((1+\alpha)/2)} \le c\varepsilon^{-1/2} \langle f \rangle^{(\alpha,\alpha)},$$

and since $v_x \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$, from (31), (28), and (29) it follows that

$$\langle u_x\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{x,D(-\varepsilon)_T} = \langle v_x\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{x,D(-\varepsilon)_T} \le cT^{(1+\alpha)/4}(\langle v_x\rangle^{((1+\alpha)/2)}_t + \langle v_{xx}\rangle^{(\alpha/2)}_t)$$
$$\le cT^{(1+\alpha)/4}(\varepsilon^{-1/2} + T^{\alpha/2}\varepsilon^{-1})\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}.$$

Applying (29) once again, we conclude that for $T \le \varepsilon \le 1$ on the set $D(-\varepsilon)_T$ we have the estimate

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \le cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)},$$

as required. □

Corollary 3.1. *If $v \in \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{D}_T)$ and $T \le \varepsilon \le 1$, then*

$$\langle v_x\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{D(-\varepsilon)_T} \le cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle\langle v\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{D_T}.$$

Indeed, by (26),

$$\langle v_x\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{D(-\varepsilon)_T} \le cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle Lv\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{D_T}$$
$$\le cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle\langle v\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{D_T}.$$

3.3. Estimates of the potential

$$g(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi. \tag{32}$$

For a function $\varphi(\xi)$ supported on a compact subset of $(0,l)$, we shall obtain estimates of the function $g(x,t)$. To estimate the Hölder constant with respect to t, we use the inequality

$$\langle v\rangle^{(\alpha)}_t \le c\sup_t|t^{1-\alpha}v_t(t)|, \tag{33}$$

which is valid whenever the right-hand side makes sense.

Lemma 3.7. *We have the estimate*

$$\langle g\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D(l)_T} \le c\max(T^{\alpha/2}, l^{\alpha/2})\langle\varphi\rangle^{(\alpha)}_x, \quad D(l)_T = (0,l)\times(0,T). \tag{34}$$

Proof. In accordance with (7), we can write

$$g(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)[\varphi(\xi) - \varphi(x)]d\xi + \varphi(x).$$

Next we use Lemma 3.1 and inequalities (14) and (15) to obtain

$$\left|t^{1-\alpha/2}\int_0^\infty G_t(x,\xi,t)[\varphi(\xi) - \varphi(x)]d\xi\right|$$

$$\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}t^{\alpha/2}\int_0^{1/2v}u^{1-2q}e^{-\gamma(u-v)^2}|u^2-v^2|^\alpha du$$
$$+c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}t^{\alpha/2}\int_{1/2v}^{\infty}u^{1-2q}e^{-\gamma(u-v)^2}(uv)^{q-1/2}|u^2-v^2|^\alpha du$$
$$\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}t^{\alpha/2}(\max(1,v^\alpha)+v^\alpha)$$
$$\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}\max(t^{\alpha/2},x^{\alpha/2}).$$

Combined with (33), this implies (34). □

Lemma 3.8. *The function $g(x,t)$ satisfies the estimate*

$$\langle g\rangle_{x,D(l)_T}^{(\alpha/2)}\le c\max(T^{\alpha/2},l^{\alpha/2})\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{35}$$

Proof. First, we consider the difference $g(x+h,t)-g(x,t)$ with $h\le t$. We have

$$g(x+h,t)-g(x,t)=\int_x^{x+h}d\theta\int_0^\infty G_\theta(\theta,\xi,t)[\varphi(\xi)-\varphi(\theta)]d\xi.$$

Denoting $v_1=\sqrt{\theta/t}$ and using the same estimates as in the preceding lemma, we get

$$|g(x+h,t)-g(x,t)|\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}\int_x^{x+h}d\theta\int_0^{1/2v_1}u^{1-2q}e^{-\gamma(u-v_1)^2}|u^2-v_1^2|^\alpha(1+u^2)$$
$$\times t^{\alpha-1}du+c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}\int_x^{x+h}d\theta\int_{1/2v_1}^\infty t^{\alpha-1}u^{1-2q}(uv_1)^{q-1/2}\left(1+\frac{u}{v_1}\right)e^{-\gamma(u-v_1)^2}$$
$$\times|u^2-v_1^2|^\alpha du\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}\int_x^{x+h}\max(t^{\alpha-1},\theta^{\alpha/2}t^{-1+\alpha/2})d\theta\le cl^{\alpha/2}h^{\alpha/2}\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}.$$

For $h\ge t$ we have

$$\frac{|g(x+h,t)-g(x,t)|}{h^{\alpha/2}}\le\frac{|g(x+h,t)-g(x+h,0)|}{t^{\alpha/2}}\left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha/2}$$
$$+\frac{|g(x+h,0)-g(x,0)|}{h^{\alpha/2}}+\frac{|g(x,t)-g(x,0)|}{t^{\alpha/2}}\left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha/2}$$
$$\le 2\langle g\rangle_t^{(\alpha/2)}+\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha/2)}$$

(we have used the relation $\lim_{t\to0}\int_0^\infty G(x,\xi,t)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]d\xi=0$).

The lemma is proved. □

Lemma 3.7 and 3.8 will help us to study the problem

$$Lv=0,\quad (x,t)\in D_t;\quad x^sv_x|_{x=0}=0;\quad v(x,0)=v_0(x)\in E^{2+\alpha}(R^+). \tag{36}$$

The solution of this problem is of the form

$$v(x,t)=\int_0^\infty G(x,\xi,t)v_0(\xi)d\xi.$$

The Green function $G(x,\xi,t)$ satisfies the equation

$$G_t-(\xi^s(\xi^{1-s}G)_\xi)_\xi=0$$

and the boundary conditions

$$\lim_{\xi\to 0}\xi^{1-s}G(x,\xi,t)=ct^{-s}e^{-x/t},\quad \lim_{\xi\to 0}\xi^s(\xi^{1-s}G)_\xi=0,$$

which can easily be verified with the help of the asymptotics of the function $I_{-q}(z)$ near $z=0$. The above relations imply that

$$v_t(x,t)=\int_0^\infty G(x,\xi,t)\xi^{1-s}(\xi^s v_{0\xi}(\xi))_\xi d\xi.$$

By Lemmas 3.7 and 3.8, we have

$$\langle v_t\rangle^{(\alpha/2,\alpha/2)}_{D(l)_T}\le c(T,l)\langle\langle v_0\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{D(l)},\quad D(l)=(0,l).$$

In the equation in (36) we transfer the term v_t to the right and then apply Lemma 2.1. As a result, we obtain

$$\langle\langle v\rangle\rangle^{(2+\alpha/2)}_{D(l)_T}\le c(T,l)\langle\langle v_0\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{D(l)},\quad \lim_{x\to 0}xv_{xx}(x,t)=0. \tag{37}$$

§4 THE LINEAR PROBLEM

Let $\Omega=(0,l)$ and $\Omega(\delta)=(0,\delta)$, where δ is some fixed sufficiently small number; we also put $\Omega_\tau=(0,l)\times(0,\tau)$, $\Omega(\delta)_\tau=(0,\delta)\times(0,\tau)$. Consider the problem

$$Mu=u_t-xa(x,t)u_{xx}-b(x,t)u_x-c(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_\tau;$$

$$xu_{xx}|_{x=0}=0;\quad u(l,t)=\varphi(t),\quad u(x,0)=0. \tag{38}$$

We assume that $\varphi\in \underset{0}{H}^{1+\alpha}([0,\tau])$, the functions $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ are elements of $H^{\alpha,\alpha}(\bar\Omega_\tau)$, and $f\in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(\bar\Omega_\tau)$. Also, we assume that there exist positive parameters μ_1, μ_2, δ such that $a(x,t)\ge\mu_1>0$ for $(x,t)\in\bar\Omega_\tau$ and $b(x,0)\ge\mu_2>0$ for $x\in\bar\Omega(\delta)$.

We put $H=\underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(\bar\Omega_\tau)\times \underset{0}{H}^{1+\alpha}([0,\tau])$; this Banach space consists of pairs $h=(f,\varphi)$ of functions, and the norm in H is defined by the formula $\|h\|_H=|f|^{(\alpha,\alpha)}_{\Omega_\tau}+\|\varphi\|^{(1+\alpha)}_{[0,\tau]}$.

In order to investigate the problem (38), we use the method described in [7, Chapter 4]. We write this problem in the form

$$Au = h, \qquad A : \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_\tau) \to H,$$

and construct a "regularizer" $R : H \to \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_\tau)$ is such a way that

$$ARh = h + Th, \qquad RAu = u + Wu, \tag{39}$$

and the norms of the operators $T : H \to H$, $W : \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_T) \to \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_T)$ be small for all sufficiently small τ. This implies the existence of the bounded operator A^{-1} inverse to the bounded operator A.

We introduce the covering of the set Ω by the sets

$$\omega^{(k)} = \left(\xi^{(k)} - \frac{\lambda}{2}, \xi^{(k)} + \frac{\lambda}{2}\right) \cap \Omega, \quad \Omega^{(k)} = \left(\xi^{(k)} - \frac{3\lambda}{4}, \xi^{(k)} + \frac{3\lambda}{4}\right) \cap \Omega,$$

where $\xi^k = k\lambda/2$, $k = 1, ..., k(\lambda)$, and $k(\lambda)$ is the smallest index k for which $x = l \in \omega^{(k(\lambda))}$. Let N_1 be the set of indices k such that $\Omega^{(k)} \cap \Omega(\delta) \neq \emptyset$, and let N_2 be the set of all other indices, $N = N_1 \cap N_2$. We put

$$\tau = \kappa\lambda^\nu, \qquad \nu = \max\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}, \frac{3}{2} + \frac{3}{1-\alpha}\right), \quad \kappa < 1, \tag{40}$$

and introduce the norms

$$\{u\}^{(2+\alpha)}_{\Omega_\tau} = \sup_k \langle\langle u\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{\Omega^{(k)}_\tau}, \tag{41}$$

$$\{u\}^{(\alpha)}_{\Omega_\tau} = \sup_k \langle u\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{\Omega^{(k)}_\tau}. \tag{42}$$

Arguing as in [7, Chapter 4, Lemma 4.2], we can show that if (40) is true, then the norms (41), (42) are equivalent to the standard norms in the spaces $\underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_\tau)$ and $\underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_\tau)$. Next, the proof of Lemma 4.4 in [7, Chapter 4] implies that for the function

$$w(x,t) = \sum_k w^{(k)}(x,t), \qquad w^{(k)}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_\tau \setminus \Omega^{(k)}_\tau,$$

we have

$$\{w\}^{(\alpha)}_{\Omega_\tau} \le N_0 \sup_k \langle w^{(k)}\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{\Omega^{(k)}_\tau}, \quad \{w\}^{(2+\alpha)}_{\Omega_\tau} \le N_0 \sup_k \langle\langle w^{(k)}\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{\Omega^{(k)}_\tau}, \quad N_0 = 3.$$

We introduce functions $\zeta^{(k)}(x)$, $\eta^{(k)}(x)$ (see [7, Chapter 4, §4]) such that

$$\zeta^{(k)}(x) = 1, \quad x \in \omega^{(k)}; \quad \zeta^{(k)}(x) = 0, \quad x \in \Omega\backslash\Omega^{(k)}; \quad \eta^{(k)}(x) = 0, \quad x \in \Omega\backslash\Omega^{(k)};$$

$$|D_x^r \zeta^{(k)}| \le c(r)/\lambda^r; \quad |D_x^r \eta^{(k)}| \le c(r)/\lambda^r; \quad \sum_k \eta^{(k)}(x)\zeta^{(k)}(x) = 1.$$

We are ready to construct the operator R. For $k \in N_1$ we put

$$s^{(k)} = b(\xi^{(k)}, 0)/a(\xi^{(k)}, 0).$$

The conditions imposed on the coefficients in (38) imply that $0 < s^{(k)} < \infty$. For $k \in N_1$ we denote by $R^{(k)}$ the operator that takes a function $f^{(k)}(x,t) \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(\bar{D}_T)$ to the solution of the problem

$$u_t^{(k)} - xa(\xi^{(k)}, 0)u_{xx}^{(k)} - b(\xi^{(k)}, 0)u_x^{(k)} = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in D_\tau;$$

$$x^{s^{(k)}} u_x^{(k)}|_{x=0} = 0; \quad u^{(k)}(x,0) = 0. \tag{43}$$

From the results of §3 it follows that this problem admits a unique solution $u^{(k)} \in \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{D}_\tau)$, and

$$\lim_{x\to 0} x u_{xx}^{(k)}(x,t) = 0. \tag{44}$$

For $k \in N_2 \backslash \{k(\lambda)\}$ the operator $R^{(k)}$ takes $f^{(k)}(x,t) \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha}(R_\tau)$ to the solution of the Cauchy problem

$$u_t^{(k)} - \xi^{(k)} a(\xi^{(k)}, 0)u_{xx}^{(k)} - b(\xi^{(k)}, 0)u_x^{(k)} = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in R_\tau;$$

$$u^{(k)}(x,0) = 0. \tag{45}$$

Since $\xi^{(k)} \ge \delta$, we deal with a nondegenerate equation; hence, the problem (45) has a unique solution $u^{(k)}$, and $u_k \in \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{D}_\tau)$ by estimates (27), (28). Finally, for $k = k(\lambda)$ the operator $R^{(k)}$ takes the pair of functions $h^{(k)} = (f^{(k)}(x,t), \varphi(t))$ to the solution of the problem

$$u_t^{(k)} - la(l,0)u_{xx}^{(k)} - b(l,0)u_x^{(k)} = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_\tau;$$

$$u^{(k)}(0,t) = 0, \quad u^{(k)}(l,t) = \varphi(t), \quad u^{(k)}(x,0) = 0. \tag{46}$$

It can be checked that in this case a unique solution $u^{(k)} \in \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_\tau)$ of the problem (46) also exists and satisfies condition (44).

Now, we define R via the collection of operators $R^{(k)}$:

$$Rh = \sum_k \eta^{(k)} u^{(k)},$$

where

$$u^{(k)} = \begin{cases} R^{(k)}(\zeta^{(k)} f), & \text{if } k \ne k(\lambda), \\ R^{(k(\lambda))}(\zeta^{(k(\lambda))} f, \varphi), & \text{if } k = k(\lambda). \end{cases}$$

Since $\sum_k \eta^{(k)} u^{(k)}(x,t)|_{x=l} = \varphi(t)$, the second component of $Th = (T_1 h, T_2 h)$ is equal to zero. As for the first component, we have

$$MRh = \sum_{k\in N} \eta^{(k)} u_t^{(k)} - xa(x,t) \sum_{k\in N} (\eta^{(k)} u_{xx}^{(k)} + 2\eta_x^{(k)} u_x^{(k)} + \eta_{xx}^{(k)} u^{(k)})$$

$$-b(x,t) \sum_{k\in N} (\eta^{(k)} u_x^{(k)} + \eta_x^{(k)} u^{(k)}) - c(x,t) \sum_{k\in N} \eta^{(k)} u^{(k)}$$

$$= \sum_{k\in N} \eta^{(k)} \zeta^{(k)} f + \sum_{k\in N} [\eta^{(k)} (b(\xi^{(k)}, 0) - b(x,t)) u_x^{(k)} - 2xa(x,t) \eta_x^{(k)} u_x^{(k)}]$$

$$- \sum_{k\in N} u^{(k)} (xa(x,t) \eta_{xx}^{(k)} + b(x,t) \eta_x^{(k)}) - \sum_k c(x,t) \eta^{(k)} u^{(k)}$$

$$+ \sum_{k\in N_1} \eta^{(k)} (a(\xi^{(k)}, t) - a(x,t)) x u_{xx}^{(k)}$$

$$+ \sum_{k\in N_2} \eta^{(k)} (a(\xi^{(k)}, 0) \xi^{(k)} - a(x,t) x) u_{xx}^{(k)}$$

$$= f + T_1 h,$$

(we have used the identity $\sum_k \eta^{(k)} \zeta^{(k)} = 1$).

In the calculation of $\langle T_1 h \rangle_{\Omega_\tau}^{(\alpha,\alpha)}$, the terms of the form $\eta_x^{(k)} u_x^{(k)}$, $k \in N_1$, deserve special attention, because, for instance,

$$\max |\eta_x^{(k)}| \langle u_x^{(k)} \rangle_x^{(\alpha)} \le \frac{c}{\lambda} \langle f^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)}.$$

However, using the local estimates of $u_x^{(k)}$ obtained in Lemma 7, by choosing appropriate parameters τ, λ, κ, ν in (40) we can arrange that the corresponding norms be small. Since, by construction, $\eta^{(k)}(x) = 0$ for $x \in \Omega(\lambda/4)$ for all $k \in N_1$, we have

$$\langle \eta_x^{(k)} u_x^{(k)} \rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha,\alpha)} \le c \langle \eta_x^{(k)} u_x^{(k)} \rangle_{\Omega_\tau^{(k)} \setminus \Omega(\lambda/8)_\tau}^{(\alpha,\alpha)}.$$

In Lemma 3.6 we take $T = \tau$, $\varepsilon = \lambda/8$. Since for sufficiently small λ we have $\tau \le \lambda/8 \le 1$ by (40), from (26) and (29) it follows that

$$\langle \eta_x^{(k)} u_x^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)} \le \langle \eta_x^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)} \max |u_x^{(k)}| + \langle u_x^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)} \max |\eta_x^{(k)}|$$

$$\le c \left[\frac{\tau^\alpha}{\lambda^{1+\alpha}} + \frac{\tau^{(1-\alpha)/2}}{\lambda} (\lambda^{-1/2} + \lambda^{-3(1-\alpha)/4}) \right] \langle f^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)}.$$

Next we apply estimate (25), recalling that the functions $a(x,t)$, $b(x,t)$ belong to the space $H^{(\alpha,\alpha)}(\bar{\Omega}_\tau)$ and using inequalities (29), (30), relation (40), and the equivalent Hölder norms. This yields

$$\langle T_1 h\rangle_{\Omega_\tau}^{(\alpha,\alpha)} \le c(\tau^\alpha + \lambda^\alpha + \kappa^\gamma)\langle f\rangle_{\Omega_\tau}^{(\alpha,\alpha)}, \qquad \gamma = \max\left(\alpha, \frac{1-\alpha}{2}\right).$$

If λ and κ are sufficiently small, then $\|T\| < 1$. Since similar arguments are valid for the operator W, this ensures the existence of the bounded operator A^{-1}.

Theorem 4.1. *Under the requirements imposed above on the data of the linear problem (38), for all sufficiently small τ this problem admits a unique solution $u(x,t) \in \underset{0}{P}^{2+\alpha,1+\alpha}(\bar{\Omega}_\tau)$, and the inequality*

$$\|u\|_{\Omega_\tau}^{(2+\alpha,1+\alpha)} \le c(|f|_{\Omega_\tau}^{(\alpha)} + |\varphi|_{[0,\tau]}^{(1+\alpha)}) \tag{47}$$

is valid with constant c depending on the coefficients of the problem and on the size of the domain Ω_τ; this constant is independent of f and φ.

§5 PROOF OF THEOREM 1.1

First, we reduce the problem (3) to a problem with zero initial data. For this, we shall seek a solution in the form $z(u,t) = \theta(u,t) + w(u,t)$, where $w(u,t)$ is a function satisfying

$$w(u,0) = z_0(u), \quad w_t(u,0) = z_t(u,0) = z_{0u}^{-2}(u)[muz_{ouu}(u) - mz_{0u}(u)/(m-1)]. \tag{48}$$

We introduce functions $w^{(1)}(u)$, $w^{(2)}(u,t)$ as solutions of the corresponding problems (s is an arbitrary positive number):

$$-L_s w^{(1)} = f(u), \quad u \in (0,1);$$
$$u^{(s)} w_u^{(1)}(u)|_{u=0} = 0, \quad w^{(1)}(1) = 0, \tag{49}$$

and

$$w_t^{(2)} - L_s w^{(2)} = 0, \quad (u,t) \in D_T;$$
$$u^{(s)} w_u^{(2)}(u,t)|_{u=0} = 0, \quad w^{(2)}(u,0) = w_0^{(2)}(u), \tag{50}$$

where $f(u) = z_t(u,0) - L_s z_0(u)$, $w_0^{(2)}(u)$ is a finite extension of the function $z_0(u) - w^{(1)}(u)$ remaining in the class $E^{2+\alpha}$. By Lemma 2.1, in the space $E^{2+\alpha}$ there exists a unique solution of (49). The solution of (50) can be represented in the form (32) (see the problem (36)), and from (37) it follows that $w^2(u,t) \in P^{2+\alpha/2,1+\alpha/2}(\bar{D}_T)$. Obviously, the function $w(u,t) = (w^{(1)}(u) + w^{(2)}(u,t))|_{\Omega_\tau}$ satisfies conditions (48) and belongs to the space $P^{2+\alpha/2,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_\tau)$. Moreover, if τ is sufficiently small, then

$$w_u(0,0)w_t(0,0) = \frac{-m}{m-1}, \quad |w_u(u,t)| \ge \delta/2, \quad (u,t) \in \Omega_\tau. \tag{51}$$

In terms of the function $\theta(u,t)$, the problem (3) takes the form

$$\begin{gathered}\theta_t - ua(u,t)\theta_{uu} - b(u,t)\theta_u = F(w,\theta), \quad (u,t)\in\Omega_\tau;\\ \theta(u,0)=0, \quad u\in[0,1];\\ u\theta_{uu}(u,t)|_{u=0}=0, \quad \theta(1,t)=-w(1,t), \quad t\in(0,\tau),\end{gathered} \tag{52}$$

where

$$a(u,t)=\frac{m}{w_u^2(u,t)}, \quad b(u,t) = -w_u^2(u,t)\left(\frac{m}{m-1}+2w_u(u,t)w_t(u,t)\right),$$

$$F(w,\theta)=\frac{m}{w_u^2(u,t)}\left(uw_{uu}-\frac{w_u}{m-1}\right)-\frac{1}{w_u^2(u,t)}[\theta_t(\theta_u^2+2w_u\theta_u)-w_t(w_u^2+\theta_u^2)].$$

By (51), we have $b(0,0)=m/(m-1)w_u^2(0,0)$, whence $b(0,0)/a(0,0)=1/(m-1)$. Now we write (52) in the form

$$A\theta = h, \quad h=(F(w,\theta),-w(1,t))$$

in accordance with §4; here the operator A satisfies the conditions of Theorem 4.1. Therefore,

$$\theta = A^{-1}[h] = A^{-1}[(F(w,\theta),-w(1,t))]=\Gamma[\theta].$$

Clearly, the fixed point of the nonlinear operator Γ is the solution of the initial problem (3). Let B_r be the ball of radius r centered at the origin in the space $\underset{0}{P}^{2+\beta,1+\beta}(\bar\Omega_\tau)$, $0<\beta<\alpha/2$. For θ_1, $\theta_2\in B_r$ we have

$$\begin{gathered}\|F(w,0)\|_{\Omega_\tau}^{(\beta,\beta)} \le c_1(\|z_0\|_{[0,1]}^{(2+\alpha)})\tau^{\alpha/2-\beta},\\ \|F(w,\theta_1)-F(w,\theta_2)\|_{\Omega_\tau}^{(\beta,\beta)} \le c_2(\|z_0\|_{[0,1]}^{(2+\alpha)})r\|\theta_1-\theta_2\|_{\Omega_\tau}^{(2+\beta,1+\beta)}.\end{gathered} \tag{53}$$

Indeed, the construction of the function $w(u,t)$ implies that $F(w,0)\in \underset{0}{H}^{\alpha/2,\alpha/2}(\bar\Omega_\tau)$, and inequality (29) gives the first inequality in (53). The second inequality in (53) is a consequence of the fact $F(w,\theta)$ contains no terms linear relative to θ. These estimates and the boundedness of the operator A^{-1} show that the mapping Γ takes the set B_r to itself and is contractive for sufficiently small r and τ. Now, Theorem 1.1 follows from the contraction mapping principle.

Remark (on improving the smoothness of the boundary). Differentiating the equations in (3) with respect to t and denoting $\zeta(u,t)=z_t(u,t)$, we obtain

$$\begin{gathered}z_u^2\zeta_t = mu\zeta_{uu}-\frac{m}{m-1}\zeta_u - 2z_uz_t\zeta_u, \quad (u,t)\in\Omega_\tau;\\ u\zeta_{uu}|_{u=0}=0, \quad \zeta(1,t)=0.\end{gathered} \tag{54}$$

Under the assumption $\zeta(u,0)=z_{0u}^{-2}(muz_{0uu}-m(m-1)^{-1}z_{0u})\in E^{2+\alpha}([0,1])$, the problem (54) for $\zeta(u,t)$ can be reduced to a problem with zero initial data; the latter problem will satisfy all conditions of Theorem 4.1. Hence $z_t(u,t)\in P^{2+\beta,1+\beta}(\bar\Omega_\tau)$, so that $\sigma(t)\in H^{2+\beta}([0,\tau])$.

References

[1] A.S. Kalashnikov, *Some problems of the qualitative theory of second order for non-linear degenerate parabolic equations*, Uspekhi Mat. Nauk **42** (1987), no. 2, 135-176; English transl., Russian Math. Surveys **42** (1987), no. 2, 169-222.

[2] B. Knerr, *The porous medium equation in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **234**(1977), 381-415.

[3] D.G. Aronson and J.L. Vázquez, *Eventual C^∞-regularity and concavity for flows in one dimensional porous media*, Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), 329-348.

[4] S.B. Angenent, *Analyticity of the interface of the porous media equations after the waiting time,* Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 329-336.

[5] S.I. Shmarev, J.L. Vázquez, *The regularity of solutions of reaction-diffusion equation via Lagrangian coordinates*, Nonlinear Differential Equations Appl. **3** (1996), 465-497.

[6] E.I. Hanzawa, *Classical solutions of the Stefan problem*, Tohoku Math. J. (2) **33** (1981), no. 2, 297-335.

[7] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear equations of the parabolic type*, "Nauka", Moscow, 1967; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[8] I.S. Gradshtein and I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and products,* 4th ed., revised, Fizmatgiz, Moscow, 1963; English transl., Academic Press, New York-London, 1965.

[9] S.A. Tersenov, *Introduction to the theory of equations degenerating on the boundary*, Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 1973 (in Russian).

THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A PLANE CORNER FOR THE HEAT EQUATION

*Electronic Journal of Differential Equation–2010.–**2010**, №90*

1 Introduction

There are various approaches in investigations of initial boundary value problems for parabolic equations in domains with singularities. In the works of Grisvard [9], Solonnikov [13], Amann [1], Garroni, Solonnikov and Vivaldi [7], Frolova [6], the existence of solutions and qualitative properties of solutions are described in the terms of Sobolev or weighted Sobolev spaces. The similar results in Hölder classes are represented in works Guidetti [10], Colombo, Guidetti, and Lorenzi [5], Solonnikov [13] (see also references in these works).

Note that in the pointed out works the method of the Green function or the theory of analytic semigroups were used to construct some explicit representation of a solution and to obtain the optimal estimates.

In the present paper we use the classical Fourier method to get a solution in the form of Fourier-Bessel series in an angular domain. Then we apply some results on trigonometric series theory, in particular, Bernstein theorem and Jackson's construction of approximating trigonometric polynomials to obtain estimates of the higher derivatives of the solution to the Dirichlet initial problem for the heat equation in weighted Hölder spaces.

Sometimes a classical solution of the initial value problem for a parabolic equation is defined as a function, that has required higher derivatives in any internal subdomain of a cylindrical domain. In the one dimensional case a similar result was published by Chernyatin [4] where a solution was represented as the sum of the trigonometric series. But to the best of our knowledge, we have not found similar results concerning with two-dimensional case.

The paper is organized as follows: in Section 2, we formulate the problem, introduce the appropriate functional space, and show the formal solution to the Dirichlet initial problem for the heat equation in the form of the sum of the trigonometric series. Section 3 contains some auxiliary estimates. In Section 4, we recall some results from the trigonometric series theory, and in Section 5 we show that the trigonometric series representing the formal solution converge together with its higher order derivatives. Section 6 consists of some final remarks to the existence and uniqueness theorem and some results concerning the parabolic equation with singular coefficients.

2 The statement of the problem and main results

We use the polar coordinate system (r,φ) on a plane R^2. Let

$$G=\{(r,\varphi): r>0, 0<\varphi<\theta\},\quad \theta\in(0,2\pi),$$

be an infinite angle on R^2, $G_T=G\times[0,T]$, $T\in R_+$, and its boundary be

$$g=g_0\cup g_1, g_0=\{(r,\varphi): r>0, \varphi=0\},$$

$$g_1=\{(r,\varphi): r>0, \varphi=\theta\}, g_{iT}=g_i\times[0,T],\quad i=0,1.$$

Let $\alpha\in(0,1)$, l be an integer. We use the weighted Hölder space $P_s^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\overline{G}_T)$ of the functions $u(r,\varphi,t)$ with the finite norm:

$$\|u\|_{P_s^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\overline{G}_T)}\equiv|u|^{l+\alpha}_{s,G_T}=\sum_{0\le\beta_1+\beta_2+2a\le l}\ \sup_{(r,\varphi,t)\in\overline{G}_T} r^{-s+\beta_1+2a}|D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u|$$

$$+\sum_{0<l+\alpha-(\beta_1+\beta_2+2a)<2}\{<D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u>^{(\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{t;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T}$$

$$+[D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u]^{(\alpha,\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{r,t;s-\beta_1-2a-2\alpha,G_T}+[D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u]^{(\alpha,\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{\varphi,t;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T}\}$$

$$+\sum_{\beta_1+\beta_2+2a=l}\{<D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u>^{(\alpha)}_{r;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T}+<D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u>^{(\alpha)}_{\varphi;s-\beta_1-2a,G_T}\},$$

with the seminorms are defined as follows, $\overline{r}=\min(\rho,r)$, $\alpha,\gamma\in(0,1)$:

$$\langle v\rangle^{(\alpha)}_{r;\mu,G_T}=\sup_{\substack{(\rho,\varphi,t),(r,\varphi,t)\in\overline{G}_T,\\ |\rho-r|\le\overline{r}/2}}\overline{r}^{-\mu}\frac{|v(\rho,\varphi,t)-v(r,\varphi,t)|}{|\rho-r|^\alpha},$$

$$\langle v\rangle^{(\alpha)}_{\varphi;\mu,G_T}=\sup_{(r,\varphi,t),(r,\psi,t)\in\overline{G}_T} r^{-\mu}\frac{|v(r,\varphi,t)-v(r,\psi,t)|}{|\varphi-\psi|^\alpha},$$

$$\langle v\rangle^{(\gamma)}_{t;\mu,G_T}=\sup_{(\rho,\varphi,t),(r,\varphi,\tau)\in\overline{G}_T} r^{-\mu}\frac{|v(r,\varphi,t)-v(r,\varphi,\tau)|}{|t-\tau|^\gamma},$$

$$[v]^{(\alpha,\gamma)}_{r,t;\mu,G_T}=\sup_{\substack{(\rho,\varphi,t),(r,\varphi,t),\\ (r,\varphi,\tau),(\rho,\varphi,\tau)\in\overline{G}_T\\ |\rho-r|\le\overline{r}/2}}\overline{r}^{-\mu}\frac{|v(r,\varphi,t)-v(r,\varphi,\tau)-v(\rho,\varphi,t)+v(\rho,\varphi,\tau)|}{|\rho-r|^\alpha|t-\tau|^\gamma},$$

$$[v]^{(\alpha,\gamma)}_{\varphi,t;\mu,G_T} = \sup_{\substack{(r,\varphi,t),(r,\psi,t),\\ (r,\varphi,\tau),(r,\psi,\tau)\in\overline{G}_T}} r^{-\mu}\frac{|v(r,\varphi,t)-v(r,\varphi,\tau)-v(r,\psi,t)+v(r,\psi,\tau)|}{|\varphi-\psi|^{\alpha}|t-\tau|^{\gamma}}.$$

The seminorms of $[\cdot]^{(\alpha,\gamma)}$ were introduced in [14]. In a similar way we introduce the space $P^{l+\alpha}_s(\overline{G})$ of the functions $u(r,\varphi)$ on G. Hereinafter we will use the subspace $\widehat{P}^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)$ of the space $P^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)$ which is introduced with the following way.

Let

$$R_T = \{(r,t) : r > 0, t \in (0,T)\},$$

and a function $v(r,\varphi,t) \in P^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)$ such that

$$v(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r,t)\sin\lambda_k\varphi, \quad \lambda_k = \tfrac{\pi k}{\theta},$$

where $v_k(r,t) = \frac{2}{\theta}\int\limits_0^{\theta} v(r,\psi,t)\sin(\lambda_k\psi)d\psi$.

We will say the function $v(r,\varphi,t) \in \widehat{P}^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)$ if $v(r,\varphi,t) \in P^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)$ and the following inequality holds:

$$S(v)_{\widehat{P}^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}_s(\overline{G}_T)} := \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{0\le\beta_1+\beta_2+2a\le l}\ \sup_{(r,t)\in\overline{R}_T} r^{-s+\beta_1+2a}\lambda_k^{\beta_2}|D^{\beta_1}_r D^a_t v_k(r,t)|$$

$$+\sum_{0<l+\alpha-(\beta_1+\beta_2+2a)<2}\{< D^{\beta_1}_r D^a_t v_k >^{(\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{t;s-\beta_1-2a-\alpha,R_T} + [D^{\beta_1}_r D^a_t v_k]^{(\alpha,\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{r,t;s-\beta_1-2a-2\alpha,R_T}\}$$

$$\times\lambda_k^{\beta_2} + \sum_{\beta_1+\beta_2+2a=l}\lambda_k^{\beta_2} < D^{\beta_1}_r D^a_t v_k >^{(\alpha)}_{r;s-\beta_1-2a-\alpha,R_T}\Big) < \infty. \tag{2.1}$$

The subspace $\widehat{P}^{l+\alpha}_s(\overline{G})$ of the function $v(r,\varphi)$ on G is introduced similarly. One can easily check that if $v(r,\varphi,t) \in \widehat{P}^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)$ or $v(r,\varphi) \in \widehat{P}^{l+\alpha}_s(\overline{G})$ then there are the constants c_i or $\tilde{c}_i$, $i=1,2$, such that

$$c_1\|v\|_{P^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)} \le S(v)_{\widehat{P}^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}_s(\overline{G}_T)} + \sum_{\beta_1+\beta_2+2a=l} < D^{\beta_1}_r D^{\beta_2}_\varphi D^a_t v >^{(\alpha)}_{\varphi;s-\beta_1-2a,G_T}$$

$$+\sum_{0<l+\alpha-(\beta_1+\beta_2+2a)<2}[D^{\beta_1}_r D^{\beta_2}_\varphi D^a_t v]^{(\alpha,\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{\varphi,t;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T} \le c_2\|v\|_{P^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}_s(\overline{G}_T)};$$

$$\tilde{c}_1\|v\|_{P^{l+\alpha}_s(\overline{G})} \le S(v)_{\widehat{P}^{l+\alpha}_s(\overline{G})} + \sum_{\beta_1+\beta_2=l} < D^{\beta_1}_r D^{\beta_2}_\varphi v >^{(\alpha)}_{\varphi;s-\beta_1,G} \le \tilde{c}_2\|v\|_{P^{l+\alpha}_s(\overline{G})}. \tag{2.2}$$

Along with the spaces $P_s^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\overline{G}_T)$, we will use the usual Hölder classes $C_{x,t}^{\alpha,\beta}$ $:= C_{x,t}^{\alpha,\beta}(\overline{\Omega}_T)$ where $\beta \in (0,1)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, and

$$\|u\|_{C_{x,t}^{\alpha,\beta}(\overline{\Omega}_T)} = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} |u(x,t)| + \langle u\rangle_x^{(\alpha)} + \langle u\rangle_t^{(\beta)},$$

$$\langle u\rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(y,t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\langle u\rangle_t^{(\beta)} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^\beta}.$$

We are looking for a solution of the Dirichlet initial problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r,\varphi,t), \qquad (r,\varphi,t) \in G_T,$$

$$u|_{g_{iT}} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(r,\varphi), (r,\varphi) \in G. \tag{2.3}$$

We suppose that

$$f(r,0,t) = f(r,\theta,t) = 0. \tag{2.4}$$

As can be seen from further arguments, conditions (2.4) are, at least formally, necessary to get a solution to problem (2.3) in the form of the Fourier-Bessel series in the space $P_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)$. Note that, due to the presence of the seminorms $[\cdot]^{(\alpha,\alpha/2)}$ in the definition of the norm in the space $P_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)$, the series solution is more smooth than the solution from the ordinary weighted Hölder spaces.

Theorem 2.1 *Let equality (2.4) and the consistency conditions of the first order in problem (2.3) be fulfilled. The functions* $f \in \widehat{P}_s^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)$ *and* $u_0 \in \widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha}(\overline{G})$. *Then there exists a unique solution* $u \in \widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)$ *and*

$$\|u\|_{P_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)} + S(u)_{\widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)} \le const.(\|f\|_{P_s^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)} + \|u_0\|_{P_{s+2}^{2+\alpha}(\overline{G})}$$

$$+S(f)_{\widehat{P}_s^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)} + S(u_0)_{\widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha}(\overline{G})}), \tag{2.5}$$

where the constant in (2.5) is independent of u, $-\pi/\theta + \alpha < s+2 < \pi/\theta$, $\alpha \in (0,1)$.

Under the proof of Theorem 2.1, we will omit the subindex G_T in the notations of the seminorms if it is clearly from the context. We will assume that the function $f(r,\varphi,0) = 0$ and, hence, can be extended by zero onto $t < 0$ with the same norm.

It can be easily seen that one of the factor in the eigenfunctions to problem (2.3) is $\sin(\lambda_k \phi)$, $\lambda_k = \frac{\pi k}{\theta}$, $k = 1, 2, ...$ So, after the standard procedure of separation of variables (see Appendix 7.1), we get the series representation of the solution:

$$u(r,\varphi,t) = R_1(r,\varphi,t) + R_2(r,\varphi,t), \tag{2.6}$$

$$R_1(r,\varphi,t)=\sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty d\rho \frac{\rho}{2(t-\tau)} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(t-\tau)}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2(t-\tau)}) b_k(\rho,\tau)$$
$$\equiv \sum_k R_{1,k}(r,t)\sin(\lambda_k\varphi), \tag{2.7}$$

$$R_2(r,\varphi,t)=\sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_0^\infty d\rho \frac{\rho}{2t} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}) u_{0k}(\rho), \tag{2.8}$$

$$u_{0k}(r)=\frac{2}{\theta}\int\limits_0^\theta u_0(r,\psi)\sin(\lambda_k\psi)d\psi, \qquad b_k(r,t)=\frac{2}{\theta}\int\limits_0^\theta f(r,\psi,t)\sin(\lambda_k\psi)d\psi, \tag{2.9}$$

where $I_\mu(z)$ is a modified Bessel function. Equality (2.6) means that the desired solution is the sum of the volume potential $R_1(r,\phi,t)$ and the potential of the initial data $R_2(r,\phi,t)$.

The general case of $f(r,\varphi,t)$, i.e. $f(r,\varphi,0)\neq 0$, can be reduced to mention above with the following procedure. Let in problem (2.3), (2.4), $f(r,\varphi,0)\in \widehat{P}_s^\alpha(\overline{G})$, and the function $\widehat{w}(r,\varphi)$ be a solution of the problem

$$\Delta\widehat{w}=-f(r,\varphi,0) \quad G, \quad \widehat{w}|_g=0,$$

and $\widehat{w}(r,\varphi)\in \widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha}(\overline{G})$ (see [16]). Then we consider the functions $w(r,\varphi,t)=\widehat{w}(r,\varphi)\cos t$ and $v(r,\varphi,t)=u(r,\varphi,t)-w(r,\varphi,t)$ such that

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v=\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+\widehat{w}\sin t+\Delta\widehat{w}\cos t=f(r,\varphi,t)+\widehat{w}(r,\varphi)\sin t$$
$$-f(r,\varphi,0)\cos t\equiv F(r,\varphi,t) \quad in \quad G_T,$$
$$v|_{g_{iT}}=0, \quad v|_{t=0}=u_0(r,\varphi)-\widehat{w}(r,\varphi). \tag{2.10}$$

One can see that the consistency conditions of the first order are fulfilled in problem (2.10); the function $F(r,\varphi,t)\in \widehat{P}_s^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)$, satisfies condition (2.4), and $F(r,\varphi,0)=0$.

Thus, the investigation of problem (2.3) can be reduced to study of problem (2.10) with the homogeneous right part in the equation if $t\leq 0$.

Note that, to prove inequality (2.5) and $u\in \widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)$ in Theorem 2.1, it is enough to show the following estimate (due to the first of inequalities in (2.2))

$$S(u)_{\widehat{P}_{s+2}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)}+\sum_{\beta_1+\beta_2+2a=2} < D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u >^{(\alpha)}_{\varphi;s+2-\beta_1-2a,G_T}$$
$$+\sum_{0<2+\alpha-(\beta_1+\beta_2+2a)<2} [D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u]^{(\alpha,\frac{2+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}_{\varphi,t;s+2-\beta_1-2a-\alpha,G_T}$$
$$\leq const.(\|f\|_{P_s^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)}+\|u_0\|_{P_{s+2}^{2+\alpha}(\overline{G})}). \tag{2.11}$$

In the all following inequalities, the constants don't depend on k.

3 Convergence of series (2.7) and (2.8)

Let us denote as

$$\Delta_s = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{1+s}}{2\tau} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4\tau}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2\tau}). \tag{3.1}$$

Lemma 3.1 *The following estimate is true*

$$\Delta_s \le \frac{r^{2+s}}{\lambda_k^2 - (s+2)^2}, \quad if \quad s+2 < \pi/\theta. \tag{3.2}$$

proof The successive changes of variables: $\frac{\rho r}{2\tau} = x$ and $x^2\tau/r^2 = z$ lead to

$$\Delta_s = r^s \int_0^t d\tau \int_0^\infty 2^{1+s}\left(\frac{x\tau}{r^2}\right)^{1+s} e^{-\frac{r^2}{4\tau}-\tau\frac{x^2}{r^2}} I_{\lambda_k}(x)dx = 2^{1+s}\int_0^\infty \frac{r^{2+s}}{x^{3+s}} I_{\lambda_k}(x)dx$$

$$\times \int_0^{t\frac{x^2}{r^2}} z^{1+s}e^{-z-\frac{x^2}{4z}}dz \le 2^{1+s}\int_0^\infty \frac{r^{2+s}}{x^{3+s}} I_{\lambda_k}(x)dx \int_0^\infty z^{1+s}e^{-z-\frac{x^2}{4z}}dz.$$

The internal integral in the last inequality can be calculated [8,(3.471(9)]

$$\int_0^\infty z^{1+s}e^{-z-\frac{x^2}{4z}}dz = 2(\frac{x^2}{4})^{1+s/2}K_{2+s}(x)$$

where $K_\mu(z)$ is a modified Bessel function of the second kind. Hence,

$$\Delta_s \le \int_0^\infty \frac{r^{2+s}}{x} I_{\lambda_k}(x)K_{2+s}(x)dx. \tag{3.3}$$

The condition of $s+2 < \pi/\theta$ is sufficient to obtain the boundedness of the right part in (3.3) for all k. Really, we take into account the tabular integral in the right part of (3.3) [8, (6.576(5))], so that

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} I_{\lambda_k}(x)K_{2+s}(x)dx = \frac{1}{4}\frac{\Gamma((\lambda_k+s+2)/2)\Gamma((\lambda_k-s-2)/2)}{\Gamma(\lambda_k+1)}$$

$$\times F((\lambda_k+s+2)/2, (\lambda_k-s-2)/2; \lambda_k+1; 1) = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\lambda_k^2}{4} - (1+\frac{s}{2})^2}, \tag{3.4}$$

here we employed the definition of the function $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ [8,(9.111)]. Inequality (3.3) together with (3.4) complete the proof of Lemma 3.1. □

The similar arguments lead to the following

Remark 3.1

$$\int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{1+s}}{2\tau} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4\tau}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2\tau}) = const. \frac{r^{2+s}}{\lambda_k^2-(s+2)^2}, \quad if \quad s+2<\pi/\theta.$$

Note that we take advantage of some tabular integrals in order to obtain the sharp estimates of the weight in the statement of Lemma 3.1. It is possible to apply simpler arguments to derive only the asymptotic Δ_s with respect to λ_k.

Hereinafter we will use the following properties of the Bessel functions

$$I_\mu(z) \sim const. \tfrac{(z/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}, \qquad for \quad small \quad value \quad of \quad z,$$

$$I_\mu(z) \sim e^z/\sqrt{2\pi z} + \tfrac{C(\mu)}{z^{3/2}}, \qquad for \quad large \quad value \quad of \quad z \tag{3.5}$$

where $C(\mu)$ is some function,

$$K_\mu(z) \sim const. z^{-\mu} \qquad for \quad |\mu| \le const. \quad and \quad small \quad value \quad of \quad z,$$

$$K_\mu(z) \sim e^{-z}/\sqrt{2\pi z} \quad for \quad |\mu| \le const. \quad and \quad large \quad value \quad of \quad z. \tag{3.6}$$

Lemma 3.2 *The following estimate holds if* $s<\pi/\theta$

$$D_s := D_s(r,t) = \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{1+s}}{2t} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}) \le const. r^s. \tag{3.7}$$

proof Let us consider the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad in \quad G_T,$$

$$u|_{t=0} = r^s \sin \lambda_k \varphi, \quad u|_{g_{iT}} = 0.$$

Denote by $w(r,\varphi) = r^s \sin\lambda_k\varphi$ and introduce the function $v(r,\varphi,t) = u(r,\varphi,t) - w(r,\varphi)$. The function $w(r,\varphi)$ satisfies the equation

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = r^{s-2}(s^2-\lambda_k^2)\sin\lambda_k\varphi,$$

and $v(r,\varphi,t)$ is a solution of the problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = r^{s-2}(s^2-\lambda_k^2)\sin\lambda_k\varphi \quad in \quad G_T,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v|_{g_{iT}} = 0.$$

Hence, by (2.7)

$$v(r,\varphi,t) = (s^2-\lambda_k^2)\sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho^{1+s-2}}{2(t-\tau)}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(t-\tau)}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2(t-\tau)}),$$

and due to Lemma 3.1

$$|v(r,\varphi,t)| \le const.r^s,$$

so that

$$|u(r,\varphi,t)| \le const.r^s.$$

On the other hand the solution $u(r,\varphi,t)$ of the initial problem can be represented by using (2.8)

$$u(r,\varphi,t) = \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho^{1+s}}{2t}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}).$$

If we take here $\varphi = \frac{\theta}{2k}$, we will obtain inequality (3.7). □

Corollary 3.1 *The inequality*

$$e^{-z}z^{1/2}I_{\lambda_k}(z) \le const., \quad z\in(0,\infty)$$

is valid for any k with a constant is independent of k.

The proof of this Corollary is given in Appendix (see subsection 7.2).

Lemma 3.3 *The following equality holds if $s=0$*

$$\lim_{t\to 0} D_0 = 1 \tag{3.8}$$

for every λ_k.

proof First of all we will prove the following fact. Let

$$\Delta_{-2,s} := \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty \frac{1}{2\tau\rho^{1-s}}e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4\tau}}I_{\lambda_k}(\tfrac{r\rho}{2\tau})d\rho$$

where s will be chosen below.

We show that $\lim\limits_{t\to 0}\Delta_{-2,s} = 0$. In fact, using the changes of variables $\frac{\rho r}{2\tau} = x$ and $\tau\frac{x^2}{r^2} = z$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{-2,s} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2x}\right)^{1-s} r^{-s} I_{\lambda_k}(x)dx \int_0^t \frac{1}{\tau^{1-s}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}-\tau\frac{x^2}{r^2}} d\tau \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-s} \int_0^\infty \frac{r^s}{x^{1+s}} I_{\lambda_k}(x)dx \int_0^{t\frac{x^2}{r^2}} z^{-1+s} e^{-z-\frac{x^2}{4z}} dz \\
&\le const. \int_0^\infty \frac{r^s}{x^{1+s}} I_{\lambda_k}(x) \left(t\tfrac{x^2}{r^2}\right)^{\alpha} dx \int_0^\infty z^{-1+s-\alpha} e^{-z-\frac{x^2}{4z}} dz \\
&\le const. t^\alpha r^{s-2\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}} I_{\lambda_k}(x) K_{-\alpha+s}(x)dx.
\end{aligned}$$

To estimate the inner integral in the next to last inequality, we used the integral representation of the function $K_\nu(y)$ [8,(8.432(6))]. The convergence of the integral in the right part as $x \to 0$ is ensured (see (3.5),(3.6)) if $-1 + 2\alpha + \lambda_k - s > -1$, i.e. for $s < 2\alpha + \lambda_k \le 2\alpha + \pi/\theta$. The convergence of the integral as $x \to \infty$ follows from the second expressions in (3.5) and (3.6). That is why

$$\lim_{t\to 0}\Delta_{-2,s} = 0. \tag{3.9}$$

The function $u(r,\varphi) = \sin(\overline{\lambda_k}\varphi)$ where $\overline{\lambda_k}$ is some fixed number from the set $\{\lambda_k\}$ is the solution of the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\overline{\lambda_k}^2}{r^2}\sin(\overline{\lambda_k}\varphi),$$

$$u|_{t=0} = \sin(\overline{\lambda_k}\varphi), \qquad u|_{\varphi=0,\theta} = 0,$$

and, hence, there is in view of (2.6)-(2.8) for the solution

$$\begin{aligned}
\sin(\overline{\lambda_k}\varphi) = \sin(\overline{\lambda_k}\varphi) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\rho \frac{\overline{\lambda_k}^2}{2\tau\rho} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4\tau}} I_{\overline{\lambda_k}}(\tfrac{\rho r}{2\tau}) \\
+ \sin(\overline{\lambda_k}\varphi) \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{2t} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\overline{\lambda_k}}(\tfrac{\rho r}{2t}).
\end{aligned}$$

After that (3.8) follows from (3.9). □

As an application of Lemma 3.3 is the next result.

Lemma 3.4 *The equality*

$$\lim_{t\to 0} R_2(r,\varphi,t) = u_0(r,\varphi) \tag{3.10}$$

is true for the function $R_2(r,\varphi,t)$ from (2.6).

proof Let us denote

$$L_k(\rho,r,t) = \frac{\rho}{2t} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}).$$

To prove the lemma, it suffices to show that the first term in the right part of the following equality (which follows from Lemma 3.3)

$$\lim_{t\to 0}\int_0^\infty L_k(\rho,r,t)u_{0k}(\rho)d\rho = \lim_{t\to 0}\int_0^\infty L_k(\rho,r,t)[u_{0k}(\rho)-u_{0k}(r)]d\rho + u_{0k}(r),$$

equals to zero. Let

$$\int_0^\infty L_k(\rho,r,t)[u_{0k}(\rho)-u_{0k}(r)]d\rho \equiv d_k.$$

We apply the mean value theorem, Corollary 3.1, and take into account that $u_0(r,\varphi)\in P^{2+\alpha}_{s+2}(G)$. We have

$$u_{0k}(\rho)-u_{0k}(r) = (\rho - r)\frac{du_{0k}}{d\rho}(\overline{r}), \quad \overline{r}\in[r,\rho],$$

so that

$$|d_k| \le const.\overline{r}^{s+1}\int_0^\infty L_k(\rho,r,t)|\rho-r|\max_{\overline{r}}\overline{r}^{-s-1}\left|\tfrac{du_{0k}(\overline{r})}{d\overline{r}}\right|d\rho \le const.\overline{r}^{s+1}$$

$$\times\max_r r^{-s-1}\left|\tfrac{du_{0k}(r)}{dr}\right|\int_0^\infty \frac{\rho}{2t}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}+\frac{\rho r}{2t}}(\tfrac{2t}{\rho r})^{1/2}|\rho-r|d\rho \le const.\tfrac{\overline{r}^{s+1}}{r^{1/2}}$$

$$\times\max_r r^{-s-1}\left|\tfrac{du_{0k}(r)}{dr}\right|\int_0^\infty \tfrac{\rho^{1/2}}{t^{1/2}}e^{-\frac{(\rho-r)^2}{4t}}|\rho-r|d\rho.$$

Denote $(\rho-r)/2\sqrt{t} = z$ then

$$|d_k| \le const.\tfrac{\overline{r}^{s+1}}{r^{1/2}}\max_r r^{-s-1}\left|\tfrac{du_{0k}(r)}{dr}\right|\int_{-\infty}^\infty \tfrac{|zt^{1/2}+r|^{1/2}}{t^{1/2}}e^{-z^2}ztdz$$

$$\le const.t^{1/2}(t^{1/4}+r^{1/2})\tfrac{\overline{r}^{s+1}}{r^{1/2}}\max_r r^{-s-1}\left|\tfrac{du_{0k}(r)}{dr}\right|.$$

Thus,

$$\lim_{t\to 0} d_k = 0$$

for every fixed r and all k.

Due to $u_0(r,\varphi) \in P^{2+\alpha}_{s+2}(G)$, we have $r^{-s-2}u_{0k}(r) \sim \frac{1}{k^{2+\alpha}}$ and $r^{-s-1}\frac{du_{0k}(r)}{dr} \sim \frac{1}{k^{1+\alpha}}$, and the all written above gives

$$\sum_k \lim_{t\to 0} d_k = 0. \tag{3.11}$$

Let us represent $R_2(r,\varphi,t)$ as

$$R_2(r,\varphi,t) = \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) \int_0^\infty L_k(\rho,r,t)[u_{0k}(\rho) - u_{0k}(r)]d\rho$$

$$+\sum_k \sin(\lambda_k\varphi) u_{0k}(r) D_0(r,t)$$

where $D_0(r,t)$ was introduced in Lemma 3.2. After passing on to the limit in this representation and taking into account (3.8) and (3.11), we obtain

$$\lim_{t\to 0} R_2(r,\varphi,t) = \lim_{t\to 0} \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) \int_0^\infty L_k(\rho,r,t)[u_{0k}(\rho) - u_{0k}(r)]d\rho$$

$$+\lim_{t\to 0} \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) u_{0k}(r) D_0(r,t) = u_0(r,\varphi).$$

□

As a some preliminary result we note that Lemma 3.1 gives the order of the decreasing to the coefficients of the trigonometric series for $r^{-s-2}R_1(r,\varphi,t)$. If one takes into account that the Fourier coefficients of functions from Hölder classes C^α have the order $1/k^\alpha$, Lemma 3.1 will lead the Fourier coefficients of $r^{-s-2}R_1(r,\varphi,t)$ have the order $1/k^{2+\alpha}$. Therefore, the function $r^{-s-2}R_1(r,\varphi,t)$ can be differentiated with respect to φ in the case r and t are fixed. We will show that the function will be differentiated twice with respect to φ. If the function $r^{-s-2}u_0(r,\varphi)$ from $R_2(r,\varphi,t)$ has the second derivative with respect to φ for the fixed r which belongs to classes C^α, Lemma 3.2 asserts that the Fourier coefficients of the function $r^{-s-2}R_2(r,\varphi,t)$ have also the order $1/k^{2+\alpha}$.

4 Some facts from the trigonometric series theory

Let $f(x)$ be a 2π-periodic function with the corresponding trigonometric series

$$f(x) \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S[f].$$

Note that the series $S[f]$ converges to $f(x)$ in the point x due to Dini's test for $f \in C^\alpha$. Let $f(x)$ be a continuous function, and $T_n(x)$ be any trigonometric polynomial of the order not higher then n,

$$\Delta(T_n) := \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - T_n(x)|,$$

$$E_n(f) := \inf \Delta(T_n)$$

where the infimum is considered throughout the set of the polynomials $T_n(x)$. The value of $E_n(f)$ is called the best approximation of the order n to the function $f(x)$ (see Ch.3, n.13 in [17]).

Theorem 4.1 *(S.N.Bernstein's Theorem, Appendix to Ch.4, n.7 in [2])*

$$E_n(f) = O(1/n^\alpha) \tag{4.1}$$

iff $f(x) \in C^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. *Moreover, if*

$$E_n(f) \le A\frac{1}{n^\alpha},$$

then

$$\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \le const.A.$$

The proof can be found in [11, Ch.4, n.2]. The next theorem contains the method of the building of the approximating trigonometric polynomial (Jackson's construction [11, Ch.4, n.2]).

Theorem 4.2 *Let a* 2π*-periodic function* $f(x) \in C^\alpha([0,2\pi])$ *and have the module of continuity* $\omega(\delta)$. *Define*

$$u_n(x) = c(n)\int_{-\pi}^{\pi} f(l)K(l-x)dl, \quad c(n) = \tfrac{3}{2\pi n(2n^2+1)}, \quad K(z) = \left(\tfrac{\sin(nz/2)}{\sin(z/2)}\right)^4.$$

Then the following statements are true:

1. *The function* $u_n(x)$ *has the form*

$$u_n(x) = A + \sum_{k=1}^{2n-2}(a_k\cos kx + b_k \sin kx),$$

i.e. $u_n(x)$ *is a trigonometric polynomial of the* $(2n-2)$ *order.*

2. *If* $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, *then* $A = 0$.

3. The following estimates holds for all x

$$|u_n(x) - f(x)| \le 6\omega(1/n). \tag{4.2}$$

We apply these theorems in the following case. Let one have the function $f(x,q) = \sum\limits_k b_k(q)\sin kx$ where $q \in \Omega \subset R^1$, and $b_k(q) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,q)\sin kx dx$, $f(x,q)$ is continuous with respect to x and q, $f(x,q) \in C_x^\alpha([0,2\pi])$ with $\alpha \in (0,1)$, uniformly with respect to q, and $\omega(\delta)$ be the module of continuity to the function $f(x,q)$ with respect to x which is uniform with respect to q,

$$\sum_k \max_q |b_k(q)| < \infty.$$

This inequlaty means that

$$\max_{x,q}|f| \ge const. \sum_k |b_k(q)|. \tag{4.3}$$

Indeed, because the series $\sum\limits_k \max\limits_q |b_k(q)|$ converges it is possible to choose N so as

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \max_q |b_k(q)| \le \tfrac{1}{2}\max_{x,q}|f|.$$

On the other hand the suitable constant can be searched such that

$$\tfrac{1}{2}\max_{x,q}|f| \ge const. \sum_{k=1}^{N} \max_q |b_k(q)|,$$

that ends the proof of (4.3).

Let us introduce the linear operator $A : C \to C$ which acts by the following rule

$$v(x,q) = Af(x,q) = \sum_k \mu_k(b_k(q))\sin kx, \quad |\mu_k(b_k(q))| \le M\max_q |b_k(q)|, \tag{4.4}$$

where M is an independent constant of k and q. The question arises, does $v(x,q)$ have the same module of continuity as $f(x,q)$. In accordance with Bernstein's theorem this question can be reformulated as is it possible to construct the approximating polynomial to $v(x,q)$ with the same approximation like (4.1). Denote $T_n(x,q) = Au_n(x,q)$ where $u_n(x,q)$ is the approximating trigonometric polynomial to the function $f(x,q)$, then

$$v(x,q) - T_n(x,q) = Af(x,q) - Au_n(x,q).$$

Following the proof of Theorem 4.2, we can write

$$\begin{aligned} Au_n(x,q) &= A\left\{ c(n)\int\limits_0^{\pi/2} [f(x+2z,q) + f(x-2z,q)]K(2z)dz \right\} \\ &= c(n)\int\limits_0^{\pi/2} A\left\{f(x+2z,q) + f(x-2z,q)\right\} K(2z)dz. \end{aligned}$$

After that we use the equality

$$2c(n)\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(nz)}{\sin(z)}\right)^4 dz = 2c(n)\int_0^{\pi/2} K(2z)dz = 1,$$

and obtain

$$T_n(x,q) - v(x,q) = c(n)\int_0^{\pi/2} A\left\{f(x+2z,q) + f(x-2z,q) - 2f(x,q)\right\} K(2z)dz. \quad (4.5)$$

The definition of the operator A together with the properties of the function $f(x,q)$ lead to the estimates:

$$\max_{x,q}|A(f(x,q))| \le M\sum_k \max_q |b_k(q)| \le const.\max_{x,q}|f(x,q)|,$$

and that is why

$$\max_{x,q}|A\left\{f(x+2z,q) + f(x-2z,q) - 2f(x,q)\right\}| \le const.\omega(2z).$$

After that the estimate of the right part can be finished like the proof of Theorem 4.2 in [11]. We have got

$$|T_n(x,q) - v(x,q)| \le const.\omega(1/n) \le const.\frac{1}{n^\alpha}.$$

Bernstein's theorem leads to $Af(x,q) \in C^\alpha([0,2\pi])$. Moreover, the estimate

$$\langle Af(x,q)\rangle_x^{(\alpha)} \le const.\,\langle f(x,q)\rangle_x^{(\alpha)} \quad (4.6)$$

follows from the proof of Bernstein's theorem. Thus we obtained the following fact.

Lemma 4.1 *Let $f(x,q)$ be continuous with respect to x,q and $f(x,q) \in C_x^\alpha$ uniformly with respect to q and $\alpha \in (0,1)$,*

$$\sum_k \max_q |b_k(q)| < \infty,$$

then $Af \in C_x^\alpha$ and estimate (4.6) holds.

Assume that $f(x,t)$ is a 2π-periodical function with respect to x and $f(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta \in (0,1)$, and

$$\sum_k (\max_t |b_k(t)| + \langle b_k\rangle_t^\beta) < \infty. \quad (4.7)$$

Let

$$u_n(x,t) = c(n)\int_{-\pi}^{\pi} f(s,t)K(x-s)ds$$

be the trigonometric polynomial from Theorem 4.2 which approximates the function $f(x,t)$. We have

$$u_n(x,t_1)-u_n(x,t_2)=c(n)\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(s,t_1)-f(s,t_2)]K(x-s)ds.$$

The properties of the kernel $K(x-s)$ ensure the inequality

$$\max_{x,t_1,t_2}\frac{|u_n(x,t_1)-u_n(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}\le const.\,\langle f(x,t)\rangle_t^{(\beta)},$$

i.e. the trigonometric polynomial approximating $f(x,t)$ has a uniformly bounded Hölder constant with respect to t. Let, as before, $T_n(x,t)=Au_n(x,t)$. Then

$$|T_n(x,t_1)-T_n(x,t_2)|=\left|c(n)\int\limits_{-\pi}^{\pi}A\{f(s,t_1)-f(s,t_2)\}K(x-s)ds\right|$$
$$\le const.\max_{x,t_1,t_2}|f(x,t_1)-f(x,t_2)|.$$

It leads to

$$\max_{x,t_1,t_2}\frac{|T_n(x,t_1)-T_n(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}\le const.\max_{x,t_1,t_2}\frac{|f(x,t_1)-f(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}. \tag{4.8}$$

If one passes to a limit in (4.8) as $n\to\infty$ (here we keep in mind that $T_n(x,t_k)\to Af(x,t_k),\quad k=1,2$) then

$$\max_{x,t_1,t_2}\frac{|Af(x,t_1)-Af(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}\le const.\,\langle f(x,t)\rangle_t^{(\beta)}.$$

Lemma 4.2 *Let the function $f(x,t)$ be a 2π-periodical function with respect to x, and $f(x,t)\in C_{x,t}^{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in(0,1)$ and (4.7) holds. Then $Af(x,t)\in C_{x,t}^{\alpha,\beta}$ and*

$$\langle Af\rangle_x^{(\alpha)}\le const.\,\langle f(x,t)\rangle_x^{(\alpha)},\quad \langle Af\rangle_t^{(\beta)}\le const.\,\langle f(x,t)\rangle_t^{(\beta)}. \tag{4.9}$$

Remark 4.1 *Lemmas 4.1 and 4.2 will hold if we change the functions $f(x,q)\in C_x^{\alpha}$ and $f(x,t)\in C_{x,t}^{\alpha,\beta}$ onto $f(x,q_1,...q_n)\in C_x^{\alpha}$ uniformly with respect to $q_1...q_n$ in Lemma 4.1, and $f(x,t_1,...t_n)\in C_{x,t_1,...t_n}^{\alpha,\beta_1,...\beta_n}$ with $0<\beta_i<1$, $i=\overline{1,n}$ in Lemma 4.2, correspondingly, and the inequality like (4.7) holds.*

5 The estimates of the higher seminorms of the solution

5.1 The estimate of $\frac{\partial^2 R_1}{\partial\varphi^2}$

Lemma 5.1 *The function $\frac{\partial^2 R_1}{\partial\varphi^2}$ meets the Hölder condition with respect to φ and*

$$\left\langle\frac{\partial^2 R_1}{\partial\varphi^2}\right\rangle_{\varphi;s+2,G_T}^{(\alpha)}+\sum_k\lambda_k^2\max_{\bar R_T}r^{-s-2}|R_{1,k}(r,t)|\le const.\,\langle f\rangle_{\varphi;s,G_T}^{(\alpha)}. \tag{5.1}$$

proof After a formal differentiation with respect to φ one can obtain

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi^2} = -\sum_k \lambda_k^2 \sin(\lambda_k \varphi) \int_0^t d\tau \int_0^\infty L_k(\rho, r, t-\tau) b_k(\rho, \tau) d\rho \tag{5.2}$$

where $b_k(r,t)$ are the Fourier coefficients of the function $f(r,\varphi,t)$. The function $f(r,\varphi,t)$ is continued odd onto the interval $(-\theta, 0)$, and $f(r,\varphi,t) = 0$ if $\varphi = 0, \theta$ or $t < 0$. In the case of a $2\theta-$ periodical function, the change of variables allows keeping the mentioned above argumentations regarding to use of the approximating trigonometric polynomial to a $2\pi-$ periodical function. Let us denote by

$$B_k = -\lambda_k^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty L_k(\rho, r, t-\tau) b_k(\rho, \tau) d\rho,$$

in view of Lemma 3.1, we get

$$|B_k| \le const. r^{2+s} \max_{r,t} r^{-s} |b_k| \tag{5.3}$$

with the constant is independent of k. After that, we put in (4.4): $x = \varphi$, $f(x,q) := f(r,\varphi,t)$, $b_k(q) := r^{-s} b_k(r,t)$, $\mu_k(b_k(q)) := r^{-2-s} B_k$, $Af(x,q) := r^{-2-s} \frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi^2}$. Then Lemma 4.1 together with the properties of the function $f(r,\varphi,t)$ (namely, $f \in \widehat{P}_s^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)$, i.e. $r^{-s} f \in C_\varphi^\alpha([0,\theta])$ uniformly with respect to t and r, inequality like (4.3) holds) lead to estimate (5.1). $\square$

Lemma 5.2 *The function* $\frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi^2}(r,\varphi,t)$ *satisfies the Hölder conditions with respect to* t *and* r. *Moreover,*

$$\sum_k \lambda_k^2 \langle R_{1,k} \rangle^{(\alpha/2)}_{t;s+2-\alpha,R_T} \le const. \langle f \rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,G_T}, \tag{5.4}$$

$$\sum_k \lambda_k^2 \langle R_{1,k} \rangle^{(\alpha)}_{r;s+2-\alpha,R_T} \le const. \langle f \rangle^{(\alpha)}_{r;s-\alpha,G_T}, \tag{5.5}$$

$$[\frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi^2}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s+2-\alpha,G_T} + \sum_k \lambda_k^2 [R_{1,k}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{r,t;s+2-2\alpha,R_T} \le const.([f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s-\alpha,G_T} + [f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{r,t;s-2\alpha,G_T}). \tag{5.6}$$

proof The proof of estimates (5.4) and (5.5) follows from the properties of the function $f(r,\varphi,t)$, Lemma 3.1 and Lemma 4.2. Regarding inequality (5.6), it is obtained if one applies Lemmas 4.2 and 5.1 to the function $[\frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi^2}(r,\varphi,t_2) - \frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi^2}(r,\varphi,t_1)]$. $\square$

5.2 The estimates of the derivative of the function $R_1(r,\varphi,t)$ with respect to t

First we obtain the representation of $\partial R_1/\partial t$. Let

$$v_k(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty d\rho L_k(\rho,r,\tau)\int\limits_0^\theta \frac{2}{\theta} f(\rho,\psi,t-\tau)\sin(\lambda_k\psi)d\psi. \tag{5.7}$$

Assume from the beginning that $f(r,\varphi,t)$ is differentiated with respect to t. Then differentiation under the integral sign acts on $f(r,\varphi,t)$, and integrating by parts gives

$$v_k(r,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty d\rho \frac{\partial L_k}{\partial \tau}(\rho,r,\tau) b_k(\rho,t-\tau) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^\infty d\rho L_k(\rho,r,\varepsilon) b_k(\rho,t). \tag{5.8}$$

Note that the derivative of the function $f(r,\varphi,t)$ is not required in (5.8). Using the relation above, we obtain the following representation

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t) &= \sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty d\rho \tfrac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,\tau)\int\limits_0^\theta \frac{2}{\theta}[f(\rho,\psi,t-\tau)\\ &- f(\rho,\psi,t)]\sin(\lambda_k\psi)d\psi + \sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_0^\infty d\rho L_k(\rho,r,t)\\ &\times \int\limits_0^\theta \frac{2}{\theta} f(\rho,\psi,t)\sin(\lambda_k\psi)d\psi \equiv A_1 + A_2.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Straight away, we obtain another useful representation of $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)$. Let

$$v_{1k}(\rho,t) = \int\limits_{-\infty}^t d\tau \int\limits_0^\infty d\rho L_k(\rho,r,t-\tau) b_k(\rho,\tau),$$

$$v_{1k}^h(\rho,t) = \int\limits_{-\infty}^{t-h} d\tau \int\limits_0^\infty d\rho L_k(\rho,r,t-\tau) b_k(\rho,\tau).$$

The derivative of $\partial v_{1k}/\partial t$ has been got as $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\partial v_{1k}^h}{\partial t}$. Not complicated calculations and Corollary 3.1 give

$$\lim_{t\to+\infty} L_k(\rho,r,t) = 0,$$

and then

$$\frac{\partial v_{1k}}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho, r, t-\tau)[b_k(\rho,\tau) - b_k(\rho,t)]d\rho, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t) &= \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\rho \frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho,r,t-\tau) \\ &\times \int\limits_{0}^{\theta} \frac{2}{\theta}[f(\rho,\psi,\tau) - f(\rho,\psi,t)]\sin(\lambda_k\psi)d\psi. \end{aligned} \tag{5.11}$$

We will use the next representation

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L_k}{\partial t}(\rho,r,t) &= -\tfrac{\rho}{2t^2} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}) + \tfrac{\rho}{2t}\tfrac{\partial}{\partial t}\{e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t})\} \\ &= i_{1k}(\rho,r,t) + i_{2k}(\rho,r,t). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Lemma 5.3 *The estimate*

$$\sum_k \max_{\overline{R}_T} r^{-s} |\tfrac{\partial R_{1,k}}{\partial t}| \le const. \|f\|_{P_s^{\alpha,\alpha/2}(G_T)} \tag{5.13}$$

holds.

proof First we justify the estimate

$$|\tfrac{\partial R_{1k}}{\partial t}| = |\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\rho \frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho,\varphi,t-\tau)[b_k(\rho,\tau) - b_k(\rho,t)]| \le const. \langle b_k\rangle_{t,s-\alpha}^{(\alpha/2)} r^s \tag{5.14}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L_k(\rho,r,t) &= -\frac{1}{t} L_k(\rho,r,t) + \frac{\rho(\rho^2+r^2)}{8t^3} I_{\lambda_k}(\tfrac{r\rho}{2t}) e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} \\ &-\tfrac{r\rho^2}{4t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} \tfrac{d}{dx} I_{\lambda_k}(x), \quad x = \tfrac{r\rho}{2t}. \end{aligned}$$

From the representation of the function $I_{\lambda_k}(x)$ (see (8.431(1)) in [8])

$$I_{\lambda_k}(x) = \tfrac{(x/2)^{\lambda_k}}{\Gamma(\lambda_k+1/2)\Gamma(1/2)} \int\limits_{-1}^{1} e^{xy}(1-y^2)^{\lambda_k-1/2} dy,$$

it follows

$$\tfrac{dI_{\lambda_k}(x)}{dx} = \tfrac{\lambda_k}{x} I_{\lambda_k}(x) + \tfrac{(x/2)^{\lambda_k}}{\Gamma(\lambda_k+1/2)\Gamma(1/2)} \int\limits_{-1}^{1} y e^{xy}(1-y^2)^{\lambda_k-1/2} dy$$

$$\equiv \tfrac{\lambda_k}{x} I_{\lambda_k}(x) + Q_{\lambda_k}(x).$$

On the other hand,(see (8.486(4)) in [8])

$$x\frac{dI_{\lambda_k}(x)}{dx} = \lambda_k I_{\lambda_k}(x) + xI_{\lambda_k+1}(x),$$

and, hence,

$$xQ_{\lambda_k}(x) = xI_{\lambda_k+1}(x).$$

From this equation and the definition of $Q_{\lambda_k}(x)$, we obtain

$$xQ_{\lambda_k}(x) \le \text{const.} \begin{cases} \frac{x^{\lambda_k+2}}{\Gamma(\lambda_k+1)}, & \text{for} \quad x \le 1, \\ xI_{\lambda_k}(x), & \text{for} \quad x > 1. \end{cases}$$

Returning to $\frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho, r, t)$, we have got

$$\frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho, r, t) = -\tfrac{1}{t} L_k + \tfrac{1}{t} L_k \tfrac{\rho^2 + r^2}{4t} - \tfrac{\lambda_k}{t} L_k - \tfrac{\rho}{2t^2} xQ_{\lambda_k}(x) e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}}$$

$$\equiv -m_1(\rho, r, t) + m_2(\rho, r, t) - m_3(\rho, r, t) - m_4(\rho, r, t), \quad x = \tfrac{r\rho}{2t}.$$

Let

$$M(r, t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_0^\infty d\rho \rho^{s-\alpha} (t-\tau)^{\alpha/2} L_k(\rho, r, t-\tau).$$

Since

$$M(r, t) = \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\rho \rho^{s-\alpha} z^{\alpha/2} L_k(\rho, r, z),$$

then

$$\frac{\partial M}{\partial t}(r, t) = 0.$$

Due to Lemma 3.2

$$\lim_{t \to 0} \quad t^{\alpha/2} \int_0^\infty d\rho \rho^{s-\alpha} L_k(\rho, r, t) = 0,$$

and therefore

$$\frac{\partial M}{\partial t}(r, t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_0^\infty d\rho \left[\tfrac{\partial}{\partial t}(t-\tau)^{\alpha/2}\right] \rho^{s-\alpha} L_k(\rho, r, t-\tau)$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_0^\infty d\rho (t-\tau)^{\alpha/2} \rho^{s-\alpha} \tfrac{\partial}{\partial t} L_k(\rho, r, t-\tau). \tag{5.15}$$

Let us consider the integral

$$M_1 = (1+\lambda_k)\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty d\rho \rho^{s-\alpha} t^{-1+\alpha/2} L_k(\rho, r, t)$$

corresponding to the sum $(m_1(\rho,r,t) + m_3(\rho,r,t))$ in the representation of $\frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho, r, t)$. The following estimate holds

$$|M_1| \le r^s \tfrac{1}{\lambda_k^{\alpha/2-\mu}}, \quad \mu < \alpha/2. \tag{5.16}$$

We represent its proof in the Appendix (see Subsection 7.3).

Now, using the integral representations of $I_{\lambda_k}(x)$ and $Q_{\lambda_k}(x)$, we get

$$\begin{aligned} m_2(\rho,r,t) - m_4(\rho,r,t) &= \tfrac{\rho}{8t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} \{(\rho^2+r^2) I_{\lambda_k}(r\rho/2t) - 2r\rho Q_{\lambda_k}(r\rho/2t)\} \\ &= \tfrac{\rho}{8t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} \{(\rho^2 - 2r\rho + r^2) I_{\lambda_k}(r\rho/2t) \\ &+ 2r\rho \tfrac{(r\rho/4t)^{\lambda_k}}{\Gamma(\lambda_k+1/2)\Gamma(1/2)} \int\limits_{-1}^{1} (1-y) e^{xy} (1-y^2)^{\lambda_k - 1/2} dy\} \ge 0. \end{aligned}$$

Estimate (5.16) means that

$$\int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_0^\infty d\rho \rho^{s-\alpha} \tau^{\alpha/2} (m_1(\rho,r,\tau) + m_3(\rho,r,\tau)) \le const. r^s \tfrac{1}{\lambda_k^{\alpha/2-\mu}}. \tag{5.17}$$

Note that the estimate of the first term at the right part of (5.15) is contained in (5.16), thus, by the equation $\frac{\partial M}{\partial t}(r,t) = 0$, we get

$$\int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_0^\infty d\rho \rho^{s-\alpha} \tau^{\alpha/2} (m_2(\rho,r,\tau) - m_4(\rho,r,\tau)) \le const. r^s \tfrac{1}{\lambda_k^{\alpha/2-\mu}}. \tag{5.18}$$

At last, we are ready with (5.17) and (5.18) to prove inequality (5.14):

$$\begin{aligned} |\tfrac{\partial R_{1k}}{\partial t}| \le \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t,s-\alpha,R_T} r^s \int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_0^\infty d\rho |\frac{\partial L_k}{\partial t}(\rho,\varphi,\tau)| \rho^{s-\alpha} \tau^{\frac{\alpha}{2}} = \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t,s-\alpha,R_T} r^s \\ \times \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_0^\infty \rho^{s-\alpha} \tau^{\frac{\alpha}{2}} (m_1(\rho,r,\tau) + m_3(\rho,r,\tau) + m_2(\rho,r,\tau) - m_4(\rho,r,\tau)) \\ \le const. \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t,s-\alpha,R_T} \tfrac{r^s}{\lambda_k^{\alpha/2-\mu}}. \end{aligned}$$

As the series $\sum\limits_k \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t,s-\alpha,R_T}$ converges, we arrive to (5.13), that finishes the proof of Lemma 5.3. □

5.3 The Hölder constant of the function $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)$ with respect to φ

We apply Theorem 4.2 to estimate the Hölder constant of the function $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)$ with respect to φ.

Let us consider the following function

$$F(x,t,\tau)=g(x,t-\tau)-g(x,t), \quad g(x,t)\in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\Omega_T)$$

where

$$\Omega_T:=[0,2\pi]\times[0,T], \quad \alpha\in(0,1),$$

and the function $g(x,t)$ satisfies to inequality (4.7). The approximating polynomial to $F(x,t,\tau)$ is

$$u_n(x,t,\tau)=c(n)\int\limits_0^{\pi/2}[F(x+2l,t,\tau)+F(x-2l,t,\tau)]K(2l)dl.$$

Let

$$T_n(x,t,\tau)=\overline{A}u_n(x,t,\tau)$$

where the operator $\overline{A}$, on the one hand, is the operator like A from (4.4) with $f(x,q):=F(x,t,\tau)$, and, on the other hand, models the operator from the right hand side in (5.11). In the same way as formerly,

$$T_n(x,t,\tau)-\overline{A}F(x,t,\tau)=c(n)\int\limits_0^{\pi/2}\overline{A}\{F(x+2l,t,\tau)+F(x-2l,t,\tau)$$

$$-2F(x,t,\tau)\}K(2l)dl. \tag{5.19}$$

After action of the operator $\overline{A}$ and following the proof of Lemma 5.3, we have got

$$\max_{x,t,\tau}|\overline{A}F(x,t,\tau)|\le const.\max_{x,t,\tau}\left\{\frac{|F(x,t,\tau)|}{\tau^{\alpha/2}}\right\}.$$

We apply this estimate to the integrand in (5.19) and obtain

$$|T_n(x,t,\tau)-\overline{A}F(x,t,\tau)|\le const.c(n)\int\limits_0^{\pi/2}K(2l)$$

$$\times\max_{x,t,\tau}\left\{\frac{|F(x+2l,t,\tau)+F(x-2l,t,\tau)-2F(x,t,\tau)|}{\tau^{\alpha/2}}\right\}dl.$$

It is obviously that

$$\max_{x,t,\tau}\frac{|F(x+2l,t,\tau)+F(x-2l,t,\tau)-2F(x,t,\tau)|}{\tau^{\alpha/2}}\le const.[g]^{(\alpha,\alpha/2)}_{x,t;\Omega_T}l^{\alpha}.$$

That is why following for the proof of Theorem 4.2, we obtain that the studied function $\overline{A}F(x,t,\tau)\in C_x^\alpha[0,2\pi])$.

Thus, the similar considerations in the case of the function $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)$ lead to

$$r^{-s}\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)\in C_\varphi^\alpha,\quad \left\langle\frac{\partial R_1}{\partial t}\right\rangle^{(\alpha)}_{\varphi;s,G_T}\le const.[f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s-\alpha,G_T}. \tag{5.20}$$

This is the place where the additional smoothness of the function $f(r,\varphi,t)$, i.e. the boundedness of the seminorm $[f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\phi,t;s-\alpha,G_T}$, is used. That, of course, is stipulated by the approach to the investigation of the problem.

5.4 The Hölder constant of the function $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)$ with respect to t

In this section we make use representation (5.11) of the function $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t)$. Let $t_2>t_1$, and $\triangle t=t_2-t_1$. We have

$$\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t_2)-\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t_1)=$$

$$\sum_k\sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{2t_1-t_2}^{t_2}d\tau\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,t_2-\tau)[b_k(\rho,\tau)-b_k(\rho,t_2)]-$$

$$-\sum_k\sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{2t_1-t_2}^{t_1}d\tau\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,t_1-\tau)[b_k(\rho,\tau)-b_k(\rho,t_1)]$$

$$+\sum_k\sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{-\infty}^{2t_1-t_2}d\tau\int\limits_0^\infty d\rho[b_k(\rho,\tau)-b_k(\rho,t_1)]\left[\frac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,t_2-\tau)-\frac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,t_1-\tau)\right]$$

$$+\sum_k\sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{-\infty}^{2t_1-t_2}d\tau\int\limits_0^\infty d\rho[b_k(\rho,t_1)-b_k(\rho,t_2)]\frac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,t_2-\tau)$$

$$=\sum_{i=1}^4\sum_k\sin(\lambda_k\varphi)\sum_{j=1}^2A^{(i)}_{j,k}, \tag{5.21}$$

where $A^{(i)}_{1,k}$, $i=\overline{1,4}$, correspond to i_{1k} in representation (5.12) for the function $\partial L_k/\partial t$ and $A^{(i)}_{2,k}$, $i=\overline{1,4}$, do to i_{2k}. By the definition

$$A^{(1)}_{1,k}=-\int\limits_{2t_1-t_2}^{t_2}d\tau\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho}{2(t_2-\tau)^2}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(t_2-\tau)}}I_{\lambda_k}\left(\frac{\rho r}{2(t_2-\tau)}\right)[b_k(\rho,\tau)-b_k(\rho,t_2)],$$

so that the inequality

$$|A^{(1)}_{1,k}|\le const.\int\limits_{2t_1-t_2}^{t_2}d\tau\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho^{s+1-\alpha}}{(t_2-\tau)^{2-\alpha/2}}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(t_2-\tau)}}I_{\lambda_k}\left(\frac{\rho r}{2(t_2-\tau)}\right)\langle b_k\rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,R_T}$$

is valid. After applying Lemma 3.2, we obtain

$$|A_{1,k}^{(1)}| \le const.r^{s-\alpha} \langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} \int\limits_{2t_1-t_2}^{t_2} \tfrac{d\tau}{(t_2-\tau)^{1-\alpha/2}}$$

$$\le const.r^{s-\alpha}(\Delta t)^{\alpha/2} \langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} . \tag{5.22}$$

The estimate of $A_{1,k}^{(2)}$ has been done with the same way. To estimate

$$A_{1,k}^{(3)} = \int\limits_{-\infty}^{2t_1-t_2} d\tau \int\limits_0^\infty d\rho[b_k(\rho,\tau)-b_k(\rho,t_1)][i_{1k}(\rho,r,t_2-\tau)-i_{1k}(\rho,r,t_1-\tau)],$$

we apply the mean value theorem. To this end we calculate

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\tfrac{\rho}{2t^2}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t})\right\} = -\frac{\partial i_{1k}}{\partial t} = -\tfrac{\rho}{t^3}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t})$$
$$+\tfrac{\rho}{2t^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t})\right\} = J_{1k}+J_{2k}.$$

Let $\bar t \in (t_1,t_2)$ and

$$A_{1,k}^{(3,1)} = \int\limits_{-\infty}^{2t_1-t_2} d\tau \int\limits_0^\infty d\rho[b_k(\rho,\tau)-b_k(\rho,t_1)]\tfrac{\rho(t_2-t_1)}{(\bar t-\tau)^3}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(\bar t-\tau)}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2(\bar t-\tau)}).$$

We restrict ourself only by the estimate of $A_{1,k}^{(3,1)}$, that is the part of $A_{1,k}^{(3)}$ corresponding to J_{1k}. The rest estimates are proved with the same way.

Note that $\bar t-\tau \ge t_1-\tau$ and $\bar t - 2t_1 + t_2 \ge \Delta t$, thus, Lemma 3.2 gives

$$A_{1,k}^{(3,1)} \le (\Delta t)\langle b_k\rangle_{t,s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} \int\limits_{-\infty}^{2t_1-t_2} d\tau \int\limits_0^\infty d\rho \tfrac{\rho^{s+1-\alpha}}{(\bar t-\tau)^{3-\alpha/2}}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(\bar t-\tau)}}I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2(\bar t-\tau)})$$
$$\le const.r^{s-\alpha}(\Delta t)^{\alpha/2}\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} .$$

The estimate of $A_{j,k}^{(4)}$ in (5.21) is got simultaneously for $j=1$ and $j=2$. We have

$$\left|\sum_{j=1}^2 A_{j,k}^{(4)}\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{2t_1-t_2} d\tau \int\limits_0^\infty d\rho[b_k(\rho,t_1)-b_k(\rho,t_2)]\frac{\partial L_k}{\partial\tau}(\rho,r,t_2-\tau)\right|$$

$$= \left| \int_0^\infty d\rho[b_k(\rho,t_1) - b_k(\rho,t_2)] \int_{-\infty}^{2t_1-t_2} \frac{\partial L_k}{\partial \tau}(\rho, r, t_2-\tau)d\tau \right|$$

$$= \left| \int_0^\infty d\rho[b_k(\rho,t_1) - b_k(\rho,t_2)] \tfrac{\rho}{2\Delta t} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4\Delta t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2\Delta t}) \right|$$
$$\le const. r^{s-\alpha}(\Delta t)^{\alpha/2} \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,R_T},$$

where Lemma 3.2 is applied.

The coefficients $A^{(i)}_{j,k}$, $i = \overline{1,3}$, $j = 2$, are evaluated similarly. Thus, the all written above gives the estimate for all $i = \overline{1,4}$, and $j = 1, 2$

$$|A^{(i)}_{j,k}| \le const. r^{s-\alpha}(\Delta t)^{\alpha/2} \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,R_T}.$$

This inequality together with the convergence of $\sum_k \langle b_k \rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,R_T}$ lead to

$$\sum_k \left\langle \frac{\partial R_{1,k}}{\partial t} \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,R_T} \le const. \langle f \rangle^{(\alpha/2)}_{t;s-\alpha,G_T} \tag{5.23}$$

as was to be proved.

5.5 The Hölder constant of the function $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r, \varphi, t)$ with respect to r

We change the variables in the representation $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r, \varphi, t)$ from (5.11): $t - \tau \to \tau$, and consider as the example, the part of one which corresponds to $i_{1k}(\rho, r, t)$ in (5.12). Let

$$V_1(r,\varphi,t) = \sum_k \sin(\lambda_k \varphi) \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\rho i_{1k}(\rho, r, \tau)[b_k(\rho, t-\tau) - b_k(\rho, t)]$$
$$\equiv \sum_k \sin(\lambda_k \varphi) V_{1,k}(r, t).$$

Consider the difference as $h > 0$

$$V_1(r+h,\varphi,t) - V_1(r,\varphi,t)$$

$$= \sum_k \sin(\lambda_k \varphi) \int_0^{h^2} d\tau \int_0^\infty d\rho i_{1k}(\rho, r+h, \tau)[b_k(\rho, t-\tau) - b_k(\rho, t)]$$

$$-\sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_0^{h^2} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\rho i_{1k}(\rho,r,\tau)[b_k(\rho,t-\tau)-b_k(\rho,t)]$$

$$+\sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\rho[i_{1k}(\rho,r+h,\tau)-i_{1k}(\rho,r,\tau)]$$

$$\times[b_k(\rho,t-\tau)-b_k(\rho,t)] \equiv \sum_{j=1}^{3}\sum_k V_{1,k}^j \sin(\lambda_k\varphi). \tag{5.24}$$

Let $r_h = r+h$. One can easy estimate the coefficients $V_{1,k}^j$, $j=1,2$ with Lemma 3.2. For instance,

$$|V_{1,k}^1| \leq \langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} \int\limits_0^{h^2} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\rho \tfrac{\rho^{s+1-\alpha}}{2\tau^2}\tau^{\alpha/2} e^{-\frac{\rho^2+r_h^2}{4\tau}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r_h}{2\tau})$$

$$\leq const.r^{s-\alpha}\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} \int\limits_0^{h^2} d\tau \tfrac{1}{\tau^{1-\alpha/2}} \leq const.r^{s-\alpha}\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} h^{\alpha}.$$

To estimate $V_{1,k}^3$ in (5.24), we apply the mean value theorem. We have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial i_{1k}(\rho,r,t)}{\partial r} &= \tfrac{r\rho}{4t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}) - \tfrac{\rho^2}{4t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} \tfrac{d}{dx} I_{\lambda_k}(x)\\
&= \tfrac{\rho}{2t^2}\left\{\tfrac{r}{2t} I_{\lambda_k}(x) - \tfrac{\rho}{2t}\tfrac{d}{dx} I_{\lambda_k}(x)\right\} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}}\\
&= \tfrac{\rho}{2t^2}\tfrac{r-\rho}{2t} I_{\lambda_k}(x) e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} - \tfrac{\rho}{2t^2}\tfrac{\rho}{2t}[\tfrac{d}{dx} I_{\lambda_k}(x)\\
&- I_{\lambda_k}(x)]e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} = j_{1k} + j_{2k}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

where $\rho r/2t = x$. In compliance with (5.25) the Fourier coefficients $V_{1,k}^3$ can be represented as $V_{1,k}^3 = V_{1,k}^{3,1} + V_{1,k}^{3,2}$. First we estimate $V_{1,k}^{3,1}$

$$V_{1,k}^{3,1} = h\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\rho \tfrac{\rho(\overline{r}-\rho)}{4\tau^3} e^{-\frac{\rho^2+\overline{r}^2}{4\tau}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho\overline{r}}{2\tau})[b_k(\rho,t-\tau)-b_k(\rho,t)]$$

where $\overline{r}\in(r,r+h)$. We have by properties of the function $b_k(\rho,t)$

$$|V_{1,k}^{3,1}| \leq \langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)} h \int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\rho \tfrac{\rho^{1+s-\alpha}|\overline{r}-\rho|}{4\tau^3}\tau^{\alpha/2} e^{-\frac{\rho^2+\overline{r}^2}{4\tau}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho\overline{r}}{2\tau}),$$

and as it follows from Subsection 7.4 in Appendix

$$\int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{1+s-\alpha}|\overline{r}-\rho|}{4t^{3/2}} e^{-\frac{\rho^2+\overline{r}^2}{4t}} I_{\lambda_k}\left(\frac{\rho\overline{r}}{2t}\right) \le const.\overline{r}^{s-\alpha}.$$

Therefore

$$|V_{1,k}^{3,1}| \le const.\,\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)}\, h\overline{r}^{s-\alpha} \int_{h^2}^\infty \tau^{\alpha/2-3/2} d\tau \le const.\,\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)}\, h^\alpha \overline{r}^{s-\alpha} \tag{5.26}$$
$$\le const.\,\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)}\, h^\alpha (r+h)^{s-\alpha} \le const.\,\langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)}\, h^\alpha r^{s-\alpha},$$

since the only case $h \le r$ should be considered to get the Hölder constant for $\partial R_1/\partial t$ with respect to r.

As for $V_{1,k}^{3,2}$ corresponding to j_{2k} in (5.25), it can be represented as ($x = r\rho/2t$)

$$j_{2k} = \frac{-\rho^2}{4t^3}\left[\frac{d}{dx} I_{\lambda_k}(x) - I_{\lambda_k}(x)\right] e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} = \frac{\rho^2}{4t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} \left[I_{\lambda_k}(x) - \frac{\lambda_k}{x} I_{\lambda_k}(x) - Q_{\lambda_k}(x)\right]$$

and

$$j_{2k} \le \frac{\rho\lambda_k}{2rt^2} I_{\lambda_k}(r\rho/2t) e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} + \frac{\rho^2}{4t^3} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} [I_{\lambda_k}(r\rho/2t) - I_{\lambda_k+1}(r\rho/2t)].$$

Note that the first term in the right part of the last inequality is estimated in the proof of Lemma 5.3 (see (5.16)), as for the second term one is evaluated like $V_{1,k}^{3,1}$. If we take into account that from the equation $I_{\lambda_k+1}(x) = Q_{\lambda_k}(x)$, we have $I_{\lambda_k+1}(x) \le const. I_{\lambda_k}(x)$, and, hence, by Corollary 3.1, $x^{1/2}e^{-x} I_{\lambda_k+1}(x) \le const.$ uniformly in k. From here it follows that $I_{\lambda_k}(x) - I_{\lambda_k+1}(x) \sim const. x^{-3/2}$ for large value of x where the constant in independent of k. Using this fact, we can repeat the arguments from Subsection 7.4. Thus, the estimate like (5.26) holds for $V_{1,k}^{3,2}$. On account of convergence of $\sum\limits_k \langle b_k\rangle_{t;s-\alpha,R_T}^{(\alpha/2)}$ we have got

$$\sum_k \langle V_{1,k}\rangle_{r;s-\alpha,R_T}^{(\alpha)} \le const.\,\langle f\rangle_{r,t;s-\alpha,G_T}^{(\alpha,\alpha/2)}.$$

Finally, we note that the analogous methods are applied to treat the function (which corresponds to i_{2k} from (5.12))

$$V_2(r,\varphi,t) = \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\rho\, i_{2k}(\rho,r,\tau)[b_k(\rho,t-\tau) - b_k(\rho,t)]$$
$$\equiv \sum_k V_{2,k}(r,t)\sin(\lambda_k\varphi),$$

and the following is true

$$\sum_k \langle V_{2,k}\rangle^{(\alpha)}_{r;s-\alpha,R_T} \leq const.\,\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{r,t;s-\alpha,G_T}\,.$$

The all written above leads to the estimate

$$\sum_k \left\langle \frac{\partial R_{1,k}}{\partial t}\right\rangle^{(\alpha)}_{r;s-\alpha,R_T} \leq const.\,\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{r,t;s-\alpha,G_T}\,. \tag{5.27}$$

Remark 5.1 *Note that the estimate of* $\sum\limits_k [\frac{\partial R_{1,k}}{\partial t}]^{\alpha,\alpha/2}_{r,t;s-2\alpha,R_T}$ *will be obtained with the same way if we apply the arguments above to the difference* $[\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t_2) - \frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,\, t_1)]$.

5.6 The estimate of the seminorm $[\frac{\partial R_1}{\partial t}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s-\alpha,G_T}$

We will use representation (5.21) to the difference of $\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t_2)-\frac{\partial R_1}{\partial t}(r,\varphi,t_1)$ to obtain the desired estimate. Let us consider the item $A^{(1)}_{j,k} = A^{(1)}_{j,k}(r,\varphi,t_1,t_2)$. Let A_1 be the operator corresponding to $A^{(1)}_{j,k}$, i.e. $A_1(f(r,\varphi,\tau) - f(r,\varphi,t_2)) = A^{(1)}_{j,k}(r,\varphi,t_1,t_2) = v(r,\varphi)$, and

$$u_n(f(r,\varphi,\tau) - f(r,\varphi,t_2)) = c(n)\int\limits_0^{\pi/2} [f(r,\varphi+2l\theta/\pi,\tau) - f(r,\varphi-2l\theta/\pi,\tau)$$
$$-f(r,\varphi+2l\theta/\pi,t_2) + f(r,\varphi-2l\theta/\pi,t_2)]K(2l)dl$$

be the approximating trigonometric polynomial of $f(r,\varphi,\tau) - f(r,\varphi,t_2)$. After that we introduce the approximating trigonometric polynomial of $A_1(f(r,\varphi,\tau) - f(r,\varphi,\, t_2))$ as $T_n(r,\varphi,\tau,t_2) = A_1u_n(f(r,\varphi,\tau) - f(r,\varphi,t_2))$. Then, as before,

$$\begin{aligned} v - T_n = c(n)\int\limits_0^{\pi/2} A_1\{&f(r,\varphi+2l\theta/\pi,\tau) - f(r,\varphi-2l\theta/\pi,\tau)\\ &- f(r,\varphi+2l\theta/\pi,t_2) + f(r,\varphi-2l\theta/\pi,t_2)\\ &- 2[f(r,\varphi,\tau) - f(r,\varphi,t_2)]\}K(2l)dl. \end{aligned}$$

Estimate (5.22) ensured that the value $A_1\{...\}$ where $\{...\}$ is the expression in the braces in the integrand can be evaluated as

$$|A_1\{...\}| \leq const.l^\alpha r^{s-\alpha}|\Delta t|^{\alpha/2}[f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s-\alpha,G_T}.$$

After that, ending the estimate as well as the proof of Theorem 4.2 and applying Theorem 4.1, we get $\frac{A^{(1)}_{j,k}(r,\varphi,t_1,t_2)}{r^{s-\alpha}|\Delta t|^{\alpha/2}} \in C^\alpha_\varphi$ uniformly with respect to the rest variables. The same arguments are true in the case of other terms in (5.21). This means

$$[\tfrac{\partial R_1}{\partial t}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s-\alpha,G_T} \leq const.[f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\varphi,t;s-\alpha,G_T}. \tag{5.28}$$

6 The proof of Theorem 2.1 and applications

To end the proof of Theorem 2.1, we note the following. The exact representation of the solution in (2.6) has been got. We have shown the proof of the estimates to the higher derivatives of the solution with respect to φ and t. After that the derivatives of the solution with respect to r are evaluated with these estimates and the equation. We have given the estimates of the solution corresponding to the bulk potential, and the estimates of the potential corresponding to the initial data are done with the same way. This proves estimate (2.11). A uniqueness of the solution in the wider class has been proved in [13]. Thus, Theorem 2.1 has been proved.

Remark 6.1 *Problem (2.3) with not uniform boundary conditions can be studied with reduction one to the problem with uniformly boundary value problem if the boundary functions are extended into the domain G_T (see [13]).*

Remark 6.2 *The described method makes possible to consider the homogeneous Dirichlet initial problem in an arbitrary domain in R^2 with an corner point on the boundary.*

In this section we only formulate the result relating to the problem for the parabolic equation with singular coefficients of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{b}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{b}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = f(r,\varphi,t), \quad (r,\varphi,t) \in G_T, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\theta} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(r,\varphi), \tag{6.2}$$

where $b = const. > 0$.

Equation (6.1) is the main part of the parabolic equation with the Bessel operator

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{b}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y,t), \quad (r,\varphi,t) \in G_T,$$

which can be also rewritten in the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{b}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + b\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = f(r,\varphi,t), \quad (r,\varphi,t) \in G_T. \tag{6.3}$$

If $b = 0$, we get the problem for the heat equation.

We shall use the representation of a solution to problem (6.1), (6.2) in the form of the Fourier series by using eigenfunctions of the problem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{b}{\varphi}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\lambda^2 v \quad \varphi \in (0,\theta), \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = 0, \quad v|_{\varphi=\theta} = 0. \tag{6.5}$$

Equation (6.4) has the two linearly independent solutions:

$$v_1(\varphi) = \varphi^{q/2} J_{q/2}(\lambda_k \varphi), \quad v_2(\varphi) = \varphi^{q/2} J_{-q/2}(\lambda_k \varphi), \quad q = 1-b, b \neq 1,$$

and if $b = 1$

$$v_1(\varphi) = J_0(\lambda_k \varphi), \quad v_2(\varphi) = N_0(\lambda_k \varphi),$$

where $J_\nu(x)$ and $N_\nu(x)$ are the Bessel functions of the first and second kind. The Bessel functions $J_\nu(x)$ has the power series representation

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

In view of this expansion the eigenfunctions $v_2(\phi)$ for $b \neq 1$ and $v_1(\phi)$ for $b = 1$ are appropriate for our purpose. They have the bounded second derivative and satisfy the first boundary condition in (6.5). To satisfy the second one, we define $\lambda = \lambda_k$ as the solutions of the equation $J_{-q/2}(\lambda_k \theta) = 0$, $k = 1, 2, ...$ We will say about the case $b \neq 1$, the case $b = 1$ can be studied similarly.

The formal solution of problem (6.1),(6.2) is represented as

$$u(r, \varphi, t) = R_{1b}(r, \varphi, t) + R_{2b}(r, \varphi, t), \tag{6.6}$$

where $R_{1b}(r, \varphi, t)$ is the volume potential

$$R_{1b}(r, \varphi, t) = \sum_k \varphi^{q/2} J_{-q/2}(\lambda_k \varphi) \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^{b/2} \frac{\rho}{2(t-\tau)} e^{-\frac{\rho^2 + r^2}{4(t-\tau)}}$$

$$\times I_{\nu_k} \left(\frac{\rho r}{2(t-\tau)} \right) a_k d\rho$$

with

$$a_k = \left(\frac{\theta^2}{2} J^2_{1-q/2}(\lambda_k \theta) \right)^{-1} \int_0^\theta \psi^{1-q/2} J_{-q/2}(\lambda_k \psi) f(\rho, \psi, \tau) d\psi,$$

and $R_{2b}(r, \varphi, t)$ is the initial data potential

$$R_{2b}(r, \varphi, t) = \sum_k \varphi^{q/2} J_{-q/2}(\lambda_k \varphi) \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^{b/2} \frac{\rho}{2t} e^{-\frac{\rho^2 + r^2}{4t}}$$

$$\times I_{\nu_k} \left(\frac{\rho r}{2t} \right) a_{0k} d\rho$$

with

$$a_{0k} = \left(\frac{\theta^2}{2} J^2_{1-q/2}(\lambda_k \theta) \right)^{-1} \int_0^\theta \psi^{1-q/2} J_{-q/2}(\lambda_k \psi) u_0(\rho, \psi) d\psi,$$

and $\nu_k^2=\lambda_k^2+b^2/4$.

It turns out that the natural space for solutions of problem (6.1), (6.2) is the space $P_{s,b}^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\overline{G}_T)$ of the functions with the finite norm (l is an integer, $\alpha\in(0,1)$)

$$\|u\|_{P_{s,b}^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\overline{G}_T)}=\sum_{0\le\beta_1+\beta_2+2a\le l}\sup_{(r,\phi,t)\in\overline{G}_T} r^{-s+\beta_1+2a}\varphi^{b/2}|D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u|$$

$$+\sum_{0<l+\alpha-(\beta_1+\beta_2+2a)<2}\{<\varphi^{b/2}D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u>_{t;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T}^{(\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}$$

$$+[\varphi^{b/2}D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u]_{r,t;s-\beta_1-2a-2\alpha,G_T}^{(\alpha,\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}$$

$$+[\varphi^{b/2}D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u]_{\varphi,t;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T}^{(\alpha,\frac{l+\alpha-\beta_1-\beta_2-2a}{2})}\}$$

$$+\sum_{\beta_1+\beta_2+2a=l}\{<\varphi^{b/2}D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u>_{r;s-\beta_1-2a-\alpha,G_T}^{(\alpha)}$$

$$+<\varphi^{b/2}D_r^{\beta_1}D_\varphi^{\beta_2}D_t^a u>_{\varphi;s-\beta_1-2a,G_T}^{(\alpha)}\}.$$

We introduce the subspace $\widehat{P}_{s,b}^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\overline{G}_T)$ $(\widehat{P}_{s,b}^{l+\alpha}(\overline{G}))$ of the space $P_s^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\overline{G}_T)$ $(P_s^{l+\alpha}(\overline{G}))$ like the definition of $\widehat{P}_s^{l+\alpha,\frac{l+\alpha}{2}}(\overline{G}_T)$ $(\widehat{P}_s^{l+\alpha}(\overline{G}))$. We are looking for the solution to the problem in the form of the series and waiting that these series converge in $\overline{G}_T$. All their terms are equal to zero at $\varphi=0$, thus, the condition

$$f(r,\theta,t)=0 \tag{6.7}$$

is necessary for the solvability of the problem in $P_{s,b}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)$.

Theorem 6.1 *Assume that the consistency conditions of the first order and condition (6.7) are fulfilled. The functions $f\in\widehat{P}_{s,b}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)$ and $u_0\in\widehat{P}_{s+2,b}^{2+\alpha}(\overline{G})$ Then there exists a unique solution $u(r,\varphi,t)\in\widehat{P}_{s,b}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{G}_T)$ and*

$$\|u\|_{P_{s+2,b}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)}+S(u)_{\widehat{P}_{s+2,b}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{G}_T)}\le const.(\|f\|_{P_{s,b}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)}+\|u_0\|_{P_{s+2,b}^{2+\alpha}(\overline{G})}$$
$$+S(f)_{\widehat{P}_{s,b}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{G}_T)}+S(u_0)_{\widehat{P}_{s+2,b}^{2+\alpha}(\overline{G})}), \tag{6.8}$$

where the constant in (6.8) is independent of $u(r,\varphi,t)$, $\alpha\in(0,1)$ and $s+2<(\lambda_1^2+b^2/4)^{1/2}$, $\lambda_1\theta$ is the smallest root of the equation $J_{-q/2}(\lambda_k\theta)=0$.

In a general, the proof of Theorem 6.1 repeats our arguments from the proof of Theorem 2.1. We note only that if $k >> 1$,

$$J_{-q/2}(\lambda_k\varphi) \sim \sqrt{\frac{1}{\lambda_k\varphi}}\{\cos(\lambda_k\varphi + \pi(q-1)/4), \quad \lambda_k\theta \sim (k-(q+1)/4)\pi + O(1/k),$$

that gives the possibility to apply here the theorems from the trigonometric series theory.

7 Appendix

7.1 Formal representation of the solution of (2.3)

To obtain the formal solution of problem (2.3), we applied the method of the separation of the variables. In detail, one consists in the following. Let us consider case of $u_0(r,\varphi) \equiv 0$ (this case corresponds to $R_2(r,\varphi,t) = 0$ in (2.4)). We look for the solution $u(r,\varphi,t)$ of the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r,\varphi,t), \qquad (r,\varphi,t) \in G_T,$$

$$u|_{g_{iT}} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0, (r,\varphi) \in G, \tag{7.1}$$

as

$$u(r,\varphi,t) = \sum_k V_k(r,t)\Phi_k(\varphi). \tag{7.2}$$

After the substitution of the function $V_k(r,t)\Phi_k(\varphi)$ into the homogenous equation and boundary condition from (7.1), we obtain

$$r^2\frac{\frac{\partial V_k}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_k}{\partial r}}{V_k} = \frac{\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \varphi^2}}{\Phi_k} \equiv -\lambda_k^2, \tag{7.3}$$

and

$$\Phi_k(0) = \Phi_k(\theta) = 0. \tag{7.4}$$

Conditions (7.3) and (7.4) lead to the function Φ_k is the solution of the problem

$$\Phi_k''(\varphi) + \lambda_k^2\Phi_k = 0,$$

$$\Phi_k(0) = \Phi_k(\theta) = 0. \tag{7.5}$$

The solution of (7.5) is the function

$$\Phi_k = sin\lambda_k\varphi, \qquad \lambda_k = \pi k/\theta, k = 1, 2.... \tag{7.6}$$

Now we return to problem (7.1) and represent $f(r,\varphi,t)$ as

$$f(r,\varphi,t) = \sum_k b_k(r,t) sin\lambda_k\varphi, \tag{7.7}$$

with

$$b_k(r,t) = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta f(r,\psi,t) sin\lambda_k\psi d\psi. \tag{7.8}$$

After that we substitute (7.2), (7.7) and (7.8) to the equation and the initial condition of (7.1) and have got

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V_k}{\partial r} + \lambda_k^2 \frac{V_k}{r^2} = b_k(r,t),$$
$$V_k(r,0) = 0. \tag{7.9}$$

Here we use that the function $\Phi_k(\varphi)$ satisfies to the equation from (7.5).

Let us denote the Hankel transformation (see, for example, [8],[12],[15] for discussion) with respect to r of the functions $V_k(r,t)$ and $b_k(r,t)$ by $\widehat{V}_k(\mu,t)$ and $\widehat{b}_k(\mu,t)$, respectively, μ is the parameter under this transformation:

$$\widehat{V}_k(\mu,t) = \int_0^\infty V_k(r,t) r J_{\lambda_k}(\mu r) dr;$$
$$\widehat{b}_k(\mu,t) = \int_0^\infty b_k(r,t) r J_{\lambda_k}(\mu r) dr, \tag{7.10}$$

where $J_{\lambda_k}(\mu r)$ is the Bessel function [8].

Expression (7.9) together with (7.10) lead to the following problem for the function $\widehat{V}_k(\mu,t)$

$$\frac{d\widehat{V}_k}{dt} + \mu^2 \widehat{V}_k = \widehat{b}_k(\mu,t),$$
$$\widehat{V}_k(\mu,0) = 0. \tag{7.11}$$

It is easy to check that the function

$$\widehat{V}_k(\mu,t) = \int_0^t e^{-\mu^2(t-\tau)} \widehat{b}_k(\mu,\tau) d\tau \tag{7.12}$$

gives the solution of problem (7.11).

After applying the inverse Hankel transformation in (7.12), we obtain

$$V_k(r,t) = \int_0^\infty \mu J_{\lambda_k}(\mu r) \int_0^t e^{-\mu^2(t-\tau)} \widehat{b}_k(\mu,\tau) d\tau d\mu. \tag{7.13}$$

Then the formal solution (7.1) follows from (7.2), (7.6) and (7.13), so,

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1} sin\lambda_k\varphi \int_0^\infty \mu J_{\lambda_k}(\mu r) \int_0^t e^{-\mu^2(t-\tau)} \widehat{b}_k(\mu,\tau) d\tau d\mu. \tag{7.14}$$

To obtain formula (2.7), we transform (7.14) applying formula (6.633(2)) from [8]:

$$\int_0^\infty \mu e^{-\mu^2(t-\tau)} J_{\lambda_k}(\mu r) J_{\lambda_k}(\mu\rho) d\mu = \frac{1}{2(t-\tau)} I_{\lambda_k}(\frac{r\rho}{2(t-\tau)}) exp(-\frac{r^2+\rho^2}{4(t-\tau)})$$

where $I_{\lambda_k}(x)$ is the modified Bessel function.

Thus,

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1} sin\lambda_k\varphi \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\rho b_k(\rho,\tau)\rho \int_0^\infty \mu J_{\lambda_k}(\mu r) e^{-\mu^2(t-\tau)} J_{\lambda_k}(\mu\rho) d\mu$$

$$= \sum_{k=1} sin\lambda_k\varphi \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\rho b_k(\rho,\tau) \frac{\rho}{2(t-\tau)} I_{\lambda_k}(\frac{r\rho}{2(t-\tau)}) exp(-\frac{r^2+\rho^2}{4(t-\tau)}).$$

That gives (2.6), (2.7) with $R_2 \equiv 0$ (due to $u_0 \equiv 0$). To obtain the complete formula (2.6), i.e. with $R_2 \neq 0$, it is enough to consider the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad (r,\varphi,t) \in G_T,$$

$$u|_{g_{iT}} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(r,\varphi), (r,\varphi) \in G, \tag{7.15}$$

and apply all reasoning mentioned above to this one.

After that the solution of (2.3) is represented as:

$$u(r,\varphi,t) = R_1(r,\varphi,t) + R_2(r,\varphi,t) \tag{7.16}$$

where $R_1(r,\varphi,t)$ and $R_2(r,\varphi,t)$ are the solutions of problem (7.1) and (7.15), correspondingly:

$$R_1(r,\varphi,t) = \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{2(t-\tau)} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(t-\tau)}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2(t-\tau)}) b_k(\rho,\tau),$$

$$R_2(r,\varphi,t) = \sum_k \sin(\lambda_k\varphi) \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{2t} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4t}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2t}) u_{0k}(\rho), \tag{7.17}$$

$$u_{0k}(r) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta u_0(r,\psi)\sin(\lambda_k\psi) d\psi, \qquad b_k(r,t) = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta f(r,\psi,t)\sin(\lambda_k\psi) d\psi. \tag{7.18}$$

Equation (2.6) means that the desired solution is the sum of the volume potential $R_1(r,\phi,t)$ and the potential of the initial data $R_2(r,\phi,t)$.

The representation for $R_1(r,\varphi,t)$ can be rewritten also at the view

$$R_1(r,\varphi,t)=\sum_k \sin(\lambda_k\varphi)\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\rho \frac{\rho}{2(t-\tau)} e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4(t-\tau)}} I_{\lambda_k}(\tfrac{\rho r}{2(t-\tau)}) b_k(\rho,\tau), \tag{7.19}$$

if $f(r,\varphi,t)=0$ for $t<0$, that was assumed.

Thus representations (7.16)-(7.19) give (2.6)-(2.9).

7.2 Proof of Corollary 3.1

In the integral from (3.7), we change the variable $\frac{\rho r}{2t}=x$ and then $x^2=y$

$$D_s=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{2xt}{r}\right)^{1+s}\frac{2t}{r}\frac{1}{2t}e^{-\frac{r^2}{4t}-t\frac{x^2}{r^2}} I_{\lambda_k}(x)dx=$$

$$=\left(\frac{2t}{r}\right)^{1+s}\frac{1}{2r}e^{-\frac{r^2}{4t}}\int\limits_0^{\infty} y^{s/2}e^{-t\frac{y}{r^2}} I_{\lambda_k}(y^{1/2})dy.$$

Using tabular integral (6.643(2)) in [8], we obtain

$$D_s=2^{1+s}r^s(t/r^2)^{\frac{1+s}{2}}e^{-\frac{r^2}{8t}}\frac{\Gamma(\frac{\lambda_k+s+2}{2})}{\Gamma(\lambda_k+1)}M_{-\frac{1+s}{2},\frac{\lambda_k}{2}}(r^2/4t).$$

In our case (see (9.221) in [8])

$$M_{-\frac{1+s}{2},\frac{\lambda_k}{2}}(r^2/4t)=\frac{(r^2/4t)^{\frac{\lambda_k+1}{2}}}{2^{\lambda_k}B(\frac{\lambda_k-s}{2},\frac{\lambda_k+s+2}{2})}N\left(\lambda_k,\frac{r^2}{8t}\right),$$

where $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(x)$ is the Gamma function, and

$$N\left(\lambda_k,\frac{r^2}{8t}\right)=\int\limits_{-1}^{1}(1+z)^{\frac{\lambda_k+s}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_k-2-s}{2}}e^{z\frac{r^2}{8t}}dz.$$

By the substitution $1+z=x$ we go to

$$N\left(\lambda_k,\frac{r^2}{8t}\right)=\int\limits_0^{2} e^{-\frac{r^2}{8t}}x^{\frac{\lambda_k+s}{2}}(2-x)^{\frac{\lambda_k-2-s}{2}}e^{x\frac{r^2}{8t}}dx.$$

In this equality, we put $s=-1$ and use tabular integral (3.383(2)) from [8], then

$$N\left(\lambda_k,\tfrac{r^2}{8t}\right)=\sqrt{\pi}\left(\tfrac{16t}{r^2}\right)^{\frac{\lambda_k}{2}}\Gamma\left(\tfrac{\lambda_k+1}{2}\right)I_{\frac{\lambda_k}{2}}\left(\tfrac{r^2}{8t}\right).$$

Finally, we gather our calculations and obtain

$$D_{-1} = const.r^{-1}e^{-z}z^{\frac{1}{2}}I_{\frac{\lambda_k}{2}}(z), \quad z = r^2/8t.$$

Lemma 3.2 leads to

$$e^{-z}z^{\frac{1}{2}}I_{\frac{\lambda_k}{2}}(z) \le const.,$$

where the constant does not depend on k. Recall that $\lambda_k = \frac{\pi}{\theta}k$, so, if we take $k = 2n$, $n = 1, 2, ...$, we will obtain our assertion. This ends the proof of Corollary 3.1.

7.3 The estimate of the integral $M_1 = (1+\lambda_k)\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho^{s-\alpha}}{t^{1-\alpha/2}}L_k(\rho, r, t)$

By using the representation of the function $I_{\lambda_k}(x)$ from (7.7.3(25)) in [3], we get (below we will point out in parentheses the change of variables in integrals)

$$M_1 = (1+\lambda_k)\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho^{1+s-\alpha}}{t^{1-\alpha/2}}\int\limits_0^\infty J_{\lambda_k}(\rho\mu)J_{\lambda_k}(r\mu)e^{-t\mu^2}\mu d\mu = (\mu = z/\rho)$$

$$= (1+\lambda_k)\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty d\rho\frac{\rho^{-1+s-\alpha}}{t^{1-\alpha/2}}\int\limits_0^\infty J_{\lambda_k}(zr/\rho)J_{\lambda_k}(z)e^{-z^2t\rho^{-2}}zdz = (\rho = y^{-1})$$

$$= (1+\lambda_k)\int\limits_0^\infty dyy^{-1-s+\alpha}\int\limits_0^\infty dzzJ_{\lambda_k}(zry)J_{\lambda_k}(z)\int\limits_0^\infty dtt^{-1+\alpha/2}e^{-z^2ty^2}.$$

The last integral can be calculated (see (3.381(4)) in [8])

$$\int\limits_0^\infty dtt^{-1+\alpha/2}e^{-z^2ty^2} = \frac{\Gamma(\alpha/2)}{z^\alpha y^\alpha},$$

so that after the changing of the variable $y = q/r$

$$M_1 = (1+\lambda_k)r^s\Gamma(\alpha/2)\int\limits_0^\infty dqq^{-1-s}\int\limits_0^\infty dzz^{1-\alpha}J_{\lambda_k}(zq)J_{\lambda_k}(z) = (1+\lambda_k)r^s\Gamma(\alpha/2)$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{1-\varepsilon} + \int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty}\right\}dqq^{-1-s}\int\limits_0^\infty dzz^{1-\alpha}J_{\lambda_k}(zq)J_{\lambda_k}(z) \equiv (1+\lambda_k)r^s\Gamma(\alpha/2)(M_1^{(1)}$$

$$+M_1^{(2)} + M_1^{(3)}). \tag{7.20}$$

For $q \in (0, 1-\varepsilon)$ the integral (see (7.7.4(29)) in [3])

$$d_1 = \int\limits_0^\infty dz z^{1-\alpha} J_{\lambda_k}(zq) J_{\lambda_k}(z) = \frac{q^{\lambda_k}\Gamma(\lambda_k + 1 - \alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}$$

$$\times F(\lambda_k + 1 - \alpha/2, 1-\alpha/2; \lambda_k + 1; q^2).$$

The function $F(\lambda_k + 1 - \alpha/2, 1 - \alpha/2; \lambda_k + 1; q^2)$ is bounded (see (9.102) in [8]) so that

$$d_1 \leq const. \frac{q^{\lambda_k}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha/2)} \lambda_k^{-\alpha/2} \leq const. q^{\lambda_k} \lambda_k^{-\alpha/2}. \tag{7.21}$$

For $q \in (1+\varepsilon, \infty)$ the integral

$$d_3 = \int\limits_0^\infty dz z^{1-\alpha} J_{\lambda_k}(zq) J_{\lambda_k}(z) = \frac{q^{-\lambda_k+\alpha-2}\Gamma(\lambda_k + 1 - \alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}$$

$$\times F(\lambda_k + 1 - \alpha/2, 1-\alpha/2; \lambda_k + 1; q^{-2}) \leq const. q^{-\lambda_k+\alpha-2} \lambda_k^{-\alpha/2}. \tag{7.22}$$

Estimates (7.21) and (7.22) lead to

$$M_1^{(1)} \leq const. \lambda_k^{-1-\alpha/2}, \quad M_1^{(3)} \leq const. \lambda_k^{-1-\alpha/2}. \tag{7.23}$$

Now we estimate the integral

$$M_1^{(2)} = \left\{ \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} + \int\limits_{1}^{1+\varepsilon} \right\} q^{-1-s} dq \int\limits_0^\infty z^{1-\alpha} J_{\lambda_k}(z) J_{\lambda_k}(qz) dz = M_1^{(2,1)} + M_1^{(2,2)},$$

$$M_1^{(2,1)} = \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} q^{-1-s} dq \int\limits_0^\infty z^{1-\alpha} J_{\lambda_k}(z) J_{\lambda_k}(qz) dz = (q = 1-x) = \int\limits_0^\varepsilon (1-x)^{-1-s} dx$$

$$\times \int\limits_0^\infty z^{1-\alpha} J_{\lambda_k}(z) J_{\lambda_k}((1-x)z) dz = \int\limits_0^\varepsilon (1-x)^{-1-s} d_{21}(x) dx,$$

$$d_{21} = \frac{(1-x)^{\lambda_k}\Gamma(\lambda_k + 1 - \alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)} F(\lambda_k + 1 - \alpha/2, 1-\alpha/2; \lambda_k+1; (1-x)^2),$$

$$M_1^{(2,2)} = \int\limits_1^{1+\varepsilon} q^{-1-s} dq \int\limits_0^\infty z^{1-\alpha} J_{\lambda_k}(z) J_{\lambda_k}(qz) dz = (q = 1+x) = \int\limits_0^\varepsilon (1+x)^{-1-s}$$

$$\times d_{22}(x) dx,$$

$$d_{22}=\frac{(1+x)^{\alpha-2-\lambda_k}\Gamma(\lambda_k+1-\alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}F(\lambda_k+1-\alpha/2,1-\alpha/2;\lambda_k+1;(1+x)^{-2}),$$

where

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=1+\tfrac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\tfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+...=1+\sum_{p=1}^{\infty}a_px^p.$$

In our case

$$a_1=\frac{(\lambda_k+1-\alpha/2)(1-\alpha/2)}{(\lambda_k+1)},\quad a_2=a_1\cdot\frac{(\lambda_k+2-\alpha/2)(2-\alpha/2)}{2\cdot(\lambda_k+2)},...,$$

i.e., $a_p\le const.$ with respect to p and λ_k.

After that

$$M_1^{(2,1)}+M_1^{(2,2)}=\frac{\Gamma(\lambda_k+1-\alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}\sum_{p=0}a_p\int_0^{\varepsilon}[(1-x)^{\lambda_k-1-s+2p}$$

$$+(1+x)^{-\lambda_k-1-s-2p-2+\alpha}]dx=\frac{\Gamma(\lambda_k+1-\alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}\sum_{p=0}a_p[(1-x)^{\lambda_k-s+2p}(\lambda_k-s$$

$$+2p)^{-1}+(1+x)^{-\lambda_k-s-2p-2+\alpha}(-\lambda_k-s-2p-2+\alpha)^{-1}]|_{x=0}^{x=\varepsilon}=\frac{\Gamma(\lambda_k+1-\alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}$$

$$\times\sum_{p=0}a_p\{[(1-\varepsilon)^{\lambda_k-s+2p}(\lambda_k-s+2p)^{-1}+(1+\varepsilon)^{-\lambda_k-s-2p-2+\alpha}(-\lambda_k-s-2p-2+\alpha)^{-1}]$$

$$-(\alpha-2-2s)(\lambda_k-s+2p)^{-1}(-\lambda_k-s-2p-2+\alpha)^{-1}\}=\frac{\Gamma(\lambda_k+1-\alpha/2)}{2^{\alpha-1}\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(\alpha/2)}$$

$$\times\{\sum_{p=0}a_p[(1-\varepsilon)^{\lambda_k-s+2p}(\lambda_k-s+2p)^{-1}+(1+\varepsilon)^{-\lambda_k-s-2p-2+\alpha}(-\lambda_k-s-2p-2+\alpha)^{-1}]$$

$$+\sum_{p=0}a_p(\alpha-2-2s)(\lambda_k-s+2p)^{-1}(\lambda_k+s+2p+2-\alpha)^{-1}\}.$$

The first series converges because, for example, for every fixed $\varepsilon\ge\varepsilon_0>0$

$$a_p(1-\varepsilon)^{\lambda_k-s+2p}(\lambda_k-s+2p)^{-1}\le\frac{const.}{\lambda_k}q^{\lambda_k},\quad q<1,$$

so

$$|\sum_{p=0}a_p[(1-\varepsilon)^{\lambda_k-s+2p}(\lambda_k-s+2p)^{-1}+(1+\varepsilon)^{-\lambda_k-s-2p-2+\alpha}(-\lambda_k-s-2p-2+\alpha)^{-1}]|\le\frac{const.}{\lambda_k}.$$

As for the second series,

$$|\sum_{p=0} a_p(\alpha - 2 - 2s)(\lambda_k - s + 2p)^{-1}(\lambda_k + s + 2p + 2 - \alpha)^{-1}| \leq \frac{const.}{\lambda_k^{1-\mu}}, \quad \mu > 0.$$

Taking into account that

$$\frac{\Gamma(\lambda_k + 1 - \alpha/2)}{\Gamma(\lambda_k + 1)} \approx \lambda_k^{-\alpha/2}$$

for large λ_k, we have got

$$|M_1^{(2)}| = |M_1^{(2,1)} + M_1^{(2,2)}| \leq const.\lambda_k^{-1+\mu-\alpha/2}. \tag{7.24}$$

Finally, the following inequality follows from (7.20), (7.23) and (7.24):

$$|M_1| \leq const.\frac{r^s}{\lambda_k^{\alpha/2-\mu}} \tag{7.25}$$

with $0 < \mu < \alpha/2$.

7.4 The estimate of the integral $\int\limits_0^\infty \frac{\rho^{1+s-\alpha}}{t^{3/2}}|r - \rho|I_{\lambda_k}(r\rho/2t)e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4t}}d\rho$ from the Subsection 5.5

In this subsection we show the estimate

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{1+s-\alpha}}{t^{3/2}}|r - \rho|I_{\lambda_k}(r\rho/2t)e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4t}}d\rho \leq const.r^{s-\alpha}.$$

Denote by

$$u = \frac{\rho}{2t^{1/2}}, \quad v = \frac{r}{2t^{1/2}}, \quad 2uv = \frac{r\rho}{2t},$$

and change the integration variable ρ by u. We get

$$I = \int\limits_0^\infty 4t\frac{(2t^{1/2}u)^{1+s-\alpha}}{t^{3/2}}|v - u|e^{-(u^2+v^2)}I_{\lambda_k}(2uv)du$$

$$\leq const.\int\limits_0^\infty t^{\frac{s-\alpha}{2}}u^{1+s-\alpha}e^{-\gamma(u-v)^2}I_{\lambda_k}(2uv)e^{-2uv}du$$

where $\gamma \in (0, 1)$.

Next we consider the integral

$$A(v) = \int_0^\infty u^\beta e^{-\gamma(u-v)^2} I_{\lambda_k}(2uv) e^{-2uv} du.$$

Introduce the new integration variable $z = uv$ so that

$$A(v) = v^{-\beta-1} \int_0^\infty z^\beta e^{-\gamma(\frac{z}{v}-v)^2} I_{\lambda_k}(2z) e^{-2z} dz = v^{-\beta-1} \int_0^1 z^\beta e^{-\gamma(\frac{z}{v}-v)^2} I_{\lambda_k}(2z)$$

$$\times e^{-2z} dz + v^{-\beta-1} \int_1^\infty z^\beta e^{-\gamma(\frac{z}{v}-v)^2} I_{\lambda_k}(2z) e^{-2z} dz \equiv A_1(v) + A_2(v).$$

To estimate $A_2(v)$, we use Corollary 3.1, and get

$$A_2(v) \leq const.v^{-\beta-1} \int_1^\infty z^{\beta-1/2} e^{-\gamma(\frac{z}{v}-v)^2} dz.$$

Now let $\xi = \frac{z}{v} - v$ then

$$A_2(v) \leq const.v^{-\beta-1} \int_{-v+1/v}^\infty v^{\beta+1/2} (\xi+v)^{\beta-1/2} e^{-\gamma\xi^2} d\xi$$

$$\leq const.v^{-1/2} \int_{-v+1/v}^\infty \max_\xi [(\xi+v)^{\beta-1/2} e^{-\gamma\xi^2/2}] e^{-\gamma\xi^2/2} d\xi.$$

One can verify that

$$\varphi(\xi, v) = (\xi+v)^{\beta-1/2} e^{-\gamma\xi^2/2} \leq const.v^{\beta-1/2}$$

under $v \geq v_0(\beta,\gamma) > 0$. It means

$$A_2(v) \leq const.v^{\beta-1} \text{ for } v \geq 1.$$

To estimate $A_2(v)$ for $v < 1$ remark that $e^{-\gamma\frac{z^2}{2v^2}} \leq e^{\frac{-\gamma}{2v^2}}$ if $z \geq 1$ and $e^{-\gamma\frac{z^2}{2v^2}} \leq e^{\frac{-\gamma z^2}{2}}$ if $v < 1$. Therefore

$$A_2(v) \leq const.v^{-1-\beta} \int_1^\infty z^{\beta-1/2} e^{-\gamma\frac{z^2}{2v^2}} e^{-\gamma\frac{z^2}{2v^2}} e^{2z} e^{-\gamma v^2} dz \leq const.v^{-1-\beta} e^{-\frac{\gamma}{2v^2}}$$

$$\times \int_1^\infty z^{\beta-1/2} e^{-\gamma\frac{z^2}{2}+2z} dz \le const.v^{-1-\beta} e^{-\frac{\gamma}{2v^2}} \le const.v^{-1+\beta}$$

for $v < 1$.

After that we evaluate the integral $A_1(v)$ for $v \ge 1$. For $z \le 1$, we use the estimate

$$I_{\lambda_k}(2z) \le const.z^{\lambda_k} \le const.z^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \pi/\theta.$$

Then

$$A_1(v) \le const.v^{-\beta-1} \int_0^1 z^{\beta+\lambda_1} e^{-\gamma(v^2-2z+z^2/v^2)} dz \le const.v^{-\beta-1} e^{-\gamma v^2}$$

$$\le const.v^{-1+\beta}$$

for $v \ge 1$.

At last, for $v < 1$

$$A_1(v) \le const.v^{-\beta-1} \int_0^1 z^{\beta+\lambda_1} e^{-\gamma(v^2-2z+z^2/v^2)} dz \le const.v^{-\beta} \int_0^{1/v} dy (yv)^{\beta+\lambda_1} e^{-\gamma y^2}$$

$$\le const.v^{\lambda_1} = const.v^{-1+\beta} v^{\lambda_1+1-\beta} \le const.v^{\beta-1}$$

if $\lambda_1 + 1 - \beta \ge 0$.

If we take $\beta = 1 + s - \alpha$, then the condition $\lambda_1 + 1 - \beta \ge 0$ means $1 - \alpha \le \pi/\theta$ that is fulfilled under conditions of Theorem 2.1. Thus, our calculations lead to

$$I \le const.t^{(s-\alpha)/2} \left(\frac{r}{2t^{1/2}}\right)^{-1+1+s-\alpha} \le const.r^{s-\alpha},$$

that was to be proved.

Acknowledgment. The authors would like to thank R.M. Trigub for useful discussion.

References

[1] H. Amann, Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications, Math. Nachr., 186 (1997), 5-56.

[2] N.K. Bari, Trigonometric series (Russian), GITTL, Moscow, 1961. [N.K. Bari, A treatise on trigonometric series, v. I,II, The Macmillan Co, New York, 1964].

[3] H.Bateman, A.Erdélyi, Higher transcendental functions, v. II, New York Toronto London, MC Graw-Hill Book Company, 1953.

[4] V.A. Chernyatin, Existence of a classical solution of a mixed problem for a second-order one-dimensional parabolic equation, Moscow Univ. Math. Bull., **46**, 6 (1990), 7-11.

[5] F. Colombo, D. Guidetti, and A. Lorenzi, Elliptic equations in nonsmooth plane domanis with an applictaion to a parabolic problem, Adv. Diff. Eq., **7**, 6 (2002), 695-716.

[6] E.V. Frolova, On a certain nonstationary problem in a dihedral angle I, J. Soviet. Math., **70** (1994), 1828-1840.

[7] M.G. Garroni, V.A. Solonnikov, and M.A. Vivaldi, Existence and regularity results for oblique derivative problem for heat equations in an angle, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **128 A**, (1998), 47-79.

[8] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of integrals, sums, series and products, 5-th ed., Academic Press, London, UK, 1994.

[9] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, London, 1985.

[10] D. Guidetti, The mixed Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a plane angle in spaces of Hölder continuous functions, Adv. Diff. Eq., **6**, 8 (2001), 897-930.

[11] I.P. Natanson, Constructive function theory (Russian), GITTL, Moscow, 1949. [I.P. Natanson, Constructive function theory, v. I, II, III, Frederic Ungar Publishing Co, New York, 1964].

[12] A.D. Polyanin, and A.V. Manzhirov, Handbook of Integral Equations, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[13] V.A. Solonnikov, Solvability of classical initial boundary-value problems for a heat equation in dihedral angle, J. Soviet. Math., **32**, (1986), 526-546.

[14] V.A. Solonnikov, Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface, Math. USSR-Izv., **11**, 6 (1978), 1323-1358.

[15] W.R. Smythe, Static and Dynamic Electricity (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, 1968.

[16] N.Vasylyeva, On solvability of the Hele-Shaw problem in weighted Hölder spaces in a plane domain with a corner point, UMB, **2**, 3 (2005), 317-343.

[17] A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd. ed. v. I,II, Cambridge University Press, New York, 1959.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

*Український Математичний Вісник–2006,–**3**, №1*

1 Введение

Пусть $s \in (0,1)$, $\Omega = (0,l)$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, где l, T — произвольные положительные числа.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} v_t = v^{1+s} v_{xx}, \qquad (x,t) \in \Omega_T, \\ v(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma_T; \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{1.1}$$

Обозначим $\omega(x) = x(l-x)$.

Будем предполагать, что

$$v_0 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), \quad v_0(0) = v_0(l) = 0, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \varkappa_* \omega^\mu(x) \le v_0(x) \le \varkappa^* \omega^\mu(x) \ \text{ при } \ x \in [0,l], \\ \text{где } 0 < \varkappa_* < \varkappa^*, \qquad \mu \in \Big[1, \frac{2}{1+s}\Big). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Постановка задачи (1.1) возникает, например, следующим образом (см. [1]). Рассмотрим задачу Коши для уравнения пористой среды ($m > 1$):

$$u_t = \left(u^m\right)_{yy}, \quad y \in R, \ t > 0; \qquad u(y,0) = u_0(y), \quad y \in R, \tag{1.4}$$

где $u_0(y)$ заданная неотрицательная функция. Известно (см. [2]), что если начальная функция u_0 имеет конечный носитель (ζ_0, η_0), то носитель решения задачи (1.4) ограничен свободными границами $\{y = \zeta(t)\}$, $\{y = \eta(t)\}$.

Обозначим

$$l = \int\limits_{\zeta_0}^{\eta_0} u_0(z)\, dz$$

и сделаем замену переменной

$$x = \int\limits_{-\infty}^{y} u(z,t)\, dz. \tag{1.5}$$

При данной замене носитель $(\zeta(t), \eta(t))$ отображается на фиксированный интервал $(0, l)$, а функция $v(x,t) = c_m u^m(y,t)$, является решением задачи (1.1), где $c_m = m^{m/(m+1)}$, $v_0(x) = c_m u_0^m(y)$, $s = 1/m$. В то же время, например, левая граница носителя решения задачи (1.4) может быть найдена из соотношения

$$\zeta(t) = \zeta_0 - c_m^{-1} \int\limits_0^t v_x(0,\tau)\, d\tau.$$

Условия (1.2), (1.3), в частности, означают, что

$$u_0^{m-1}(y) \geq \tilde{\mu}(y-\zeta_0)^{1+\gamma}, \qquad \gamma \in [0,1) \tag{1.6}$$

в некоторой малой окрестности точки $x = \zeta_0$. Следовательно, (см. [3]) в задаче (1.4) равно нулю время ожидания, в течение которого свободная граница $\zeta(t)$ неподвижна.

Подробный перечень ссылок работ, посвящённых изучению задач вида (1.1) может быть найден в [4,5]. Библиография по параболическим уравнениям с вырождением различного вида приводится в [2,6]. Отметим также работу [7], в которой замена вида (1.5) обобщена на случай уравнений реакции-диффузии $u_t = (u^m)_{yy} + f(u)$ и работу [8] , посвященную построению асимптотического решения и асимптотики границы фронта $\zeta(t)$ для уравнения пористой среды, в случае, когда начальная функция имеет вид:

$$u_0(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 0, \\ (-y)^{\frac{1+\gamma}{m-1}}\phi(y), & y < 0, \quad \phi(0) \neq 0. \end{cases}$$

Кроме того, следует упомянуть работу [9], в которой предложен новый, оригинальный подход к изучению задач со свободной границей для вырождающихся параболических уравнений с нестепенными нелинейностями. Данный подход позволяет в достаточно общей ситуации получить оценки констант Гельдера по x и t и оценки типа Бернштейна для решения задачи Коши вблизи свободной границы.

Данная работа является продолжением исследования регулярности решений краевых задач для вырождающихся параболических уравнений, начатого в работах [10, 11].

Определение 1.1. *Функцию $v(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи* (1.1), *если $v(x,t) \geq 0$ при $(x,t) \in \Omega_T$, $v \in C\left(\overline{\Omega}_T\right) \cap L^\infty\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}^{1,\infty}(0,l)\big)$ и для произвольной функции $\psi \in C^{1,1}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, $\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$ выполнено интегральное тожде-*

ство

$$\int_0^l v(x,T)\psi(x,T)\,dx - \int_0^l v_0(x)\psi(x,0)\,dx$$

$$= \int_0^T \int_0^l \left\{ v\psi_t - v^{1+s}v_x\psi_x - (1+s)v^s(v^2)_x\psi \right\} dx\,dt. \quad (1.7)$$

Обозначим $q = 1 - s$, $\Omega_{t_0,T} = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (t_0, T)\}$, где $t_0 \geq 0$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), *тогда существует обобщенное решение задачи* (1.1), *причем* $v \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}_{t_0,T}\right)$, *для произвольных* $t_0 > 0$ *и* $\alpha \in (0,1)$.

Здесь $H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}_{t_0,T}\right)$ — весовое пространство Гельдера, определенное ниже в п. 4.

План работы состоит в следующем. В первом пункте приводится схема доказательства существования обобщенного решения. Во втором пункте методом построения барьерных функций получены априорные оценки, являющиеся основой для доказательства теоремы 1.1. В третьем пункте сформулированы основные результаты относительно разрешимости начально-краевой задачи для линейного вырождающего параболического уравнения

$$\begin{gathered} u_t = a(x,t)\omega^{1+s}u_{xx} + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Sigma_T, \qquad u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \end{gathered} \quad (1.8)$$

в классической постановке. В четвертом пункте получены оценки решения модельной задачи в полупространстве, соответствующей задаче (1.8). В пятом пункте доказана теорема 1.1.

2 Существование обобщенного решения

Данный пункт носит вспомогательный характер. Существование обобщённого решения задачи (1.1) при выполнении условия (1.2) следует из результатов работы [12]. Для полноты изложения приведём основные моменты доказательства. Рассмотрим последовательность аппроксимирующих задач

$$\begin{gathered} v_{n,t} = a_n(v_n)v_{n,xx}, \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ v_n(x,t) = \frac{1}{n}, \quad (x,t) \in \Sigma_T; \\ v_n(x,0) = v_{0,n}(x) + \frac{1}{n}, \quad x \in \Omega, \end{gathered} \quad (2.1)$$

где функции $a_n(\cdot) \in C^2(R)$ удовлетворяют условию

$$a_n(v) = \begin{cases} v^{1+s}, & \text{при } v > \frac{1}{n}, \\ \left(\frac{1}{2n}\right)^{1+s}, & \text{при } v < \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

а $\{v_{0,n}\}$ — последовательность функций таких, что

$$0 \le v_{0,n+1}(x) \le v_{0,n}(x), \quad x \in \Omega,$$
$$v_{0,n} \to v_0, \ v'_{0,n} \to v'_0, \ \text{ в } C(\overline{\Omega}) \text{ при } n \to \infty.$$

Также необходимо потребовать выполнение условий согласования до второго порядка включительно, что применительно к данной задаче сводится к следующим равенствам

$$v_{0,n}(x) = 0, \ \ v''_{0,n}(x) = 0, \ \text{при } x = 0, l. \tag{2.2}$$

При каждом фиксированном значении n из теоремы 5.2 главы VI монографии [13] следует существование единственного классического решения задачи (2.1).

Используя принцип максимума (см. [12]) можно показать, что

$$\frac{1}{n} \le v_n(x,t) \quad \text{ при } (x,t) \in \Omega_T \tag{2.3}$$

и, следовательно, $a_n(v_n((x,t)) = v_n^{1+s}(x,t)$, а также, что имеют место равномерные по n оценки

$$v_n(x,t) \le M_0, \quad |v_{n,x}(x,t)| \le M_1 \quad \text{ при } (x,t) \in \Omega_T. \tag{2.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что последовательность $\{v_n\}$ невозрастающая. Действительно, для разности $w_n = v_{n+1} - v_n$ имеем

$$w_{n,t} = v_{n+1}^{1+s}\, w_{n,xx} + c_n(x,t)\, w_n, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$
$$w_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \le 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T;$$
$$w_n(x,0) = v_{0,n+1} - v_{0,n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \le 0, \quad x \in \Omega,$$

где

$$c_n(x,t) = (1+s)v_{n,xx} \int\limits_0^1 (v_n + \lambda w_n)^s \, d\lambda.$$

Применяя следствие 2.1, гл. I работы [13], заключаем, что $v_{n+1} - v_n \le 0$.

Из оценки (2.4) следует, что

$$|v_n(x,t) - v_n(y,t)| \le M_1 |x-y|, \ \text{для всех } (x,t),(y,t) \in \overline{\Omega}_T. \tag{2.5}$$

Далее, поскольку оператор $Lu = u_t - u^{1+s}u_{xx}$ удовлетворяет условиям работы [14], имеем так же следующую оценку

$$|v_n(x,t) - v_n(x,\sigma)| \leq C_1|t-\sigma|^{1/3}, \text{ для всех } (x,t),(x,\sigma) \in \overline{\Omega}_T, \tag{2.6}$$

где постоянная C_1 зависит от M_0, M_1 и l.

Из полученных выше оценок и теоремы Арцела–Асколи вытекает, что последовательность v_n сходится к некоторой функции v равномерно в $\overline{\Omega}_T$ при $n \to \infty$ и $v_{n,x} \to v_x$ слабо в $L^p(\Omega_T)$ для любого $p \in (1,\infty)$, причем $v(x,t)$ липшицева по x, гельдерова по t с показателем $1/3$ и, кроме того, $|v_x| \leq M_1$ п.в. в Ω_T. Переходя к пределу в интегральном тождестве (1.7), заключаем, что предельная функция $v(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1.1). Единственность доказана в [1].

3 Получение априорных оценок методом построения барьерных функций

В дальнейших рассуждениях важную роль играют следующие поточечные оценки обобщенного решения v и его производных.

Лемма 3.1 дает описание поведения $v(x,t)$ в окрестности боковой границы Σ_T в зависимости от свойств начальной функции $v_0(x)$. Далее доказана ограниченность максимума модуля функции $v_t/v = v^s v_{xx}$ при $t > 0$. Оценка v_t/v снизу приведена в лемме 3. Для оценки сверху (лемма 3) предварительно установлена непрерывность производной $v_x(x,t)$ вплоть до границы (лемма 3) и, кроме того, в леммах 3, 3 доказано, что v_t стремится к нулю при $x \to 0$ ($x \to l$) с порядком не меньшим, чем x^s ($(l-x)^s$). Основным результатом данного пункта является оценка (3.38) для $|v_t/v|$ в области $\Omega_{t_0,T}$.

Лемма 3.1.

1. *Пусть для некоторой постоянной* $\varkappa_0$ *имеем*

$$v_0(x) \geq \varkappa_0\ \omega(x),$$

тогда существует постоянная $c_0 > 0$ *такая, что*

$$v(x,t) \geq \varkappa_0 \omega(x) \exp(-c_0\ t) \tag{3.1}$$

при $(x,t) \in \Omega_T$.

2. *Пусть для некоторой постоянной* $\varkappa_1$ *имеем* $v_0(x) \leq \varkappa_1\ \omega(x)$, *тогда существует постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что*

$$v(x,t) \leq \varkappa_1 \omega(x) \exp(-c_1\ t) \tag{3.2}$$

при $(x,t) \in \Omega_T$.

3. *Пусть для некоторой постоянной* $\varkappa$ *имеет место неравенство* $v(x,0) \geq \varkappa\, \omega^\mu(x)$, $\mu \in \bigl(1, \frac{2}{1+s}\bigr)$, *тогда существуют постоянная* $c > 0$ *и достаточно малое значение параметра* τ *такие, что*

$$v(x,t) \geq \varkappa\bigl(t^\lambda \omega(x) + \omega^\mu(x)\bigr)\exp(-c\ t), \tag{3.3}$$

при $(x,t) \in \Omega_\tau$, *где* $\lambda = \frac{1-s\mu}{2-(1+s)\mu}$.

Доказательство. Все три утверждения леммы доказываются применением классического принципа максимума для параболических уравнений. Наибольшую трудность представляет (3.3), поэтому приведём доказательство только этой оценки.

Обозначим $u(x,t) = \varkappa\bigl(t^\lambda\omega(x) + \omega^\mu(x)\bigr)\exp(-ct)$. Прежде всего, из ограничений на параметр μ легко убедиться в том, что $\lambda > 1$. Сначала удобно доказать справедливость оценки вида (3.3) для решений задач (2.1).

Пусть при некоторых значениях c и τ имеет место неравенство

$$Lu = u_t - u^{1+s}u_{xx} \leq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \Omega_\tau, \tag{3.4}$$

тогда для разности $w(x,t) = u(x,t) - v_n(x,t)$ справедливо следующее соотношение

$$w_t = u^{1+s}\, w_{xx} + c_n(x,t)\, w \leq 0, \qquad (x,t) \in \Omega_\tau,$$

где

$$c_n(x,t) = (1+s)\int\limits_0^1 (u + \theta(v_n(x,t) - u(x,t))^s\ d\theta\, v_{n,xx}(x,t).$$

Очевидно, можем считать, что

$$w(x,t) \leq 0, \quad \text{при } (x,t) \in \Sigma_T; \quad w(x,0) \leq 0, \quad \text{при } x \in \Omega.$$

Снова применяя следствие 2.1, гл. I работы [13], можно заключить, что $w(x,t) = u(x,t) - v_n(x,t) \leq 0$. Таким образом, проблема сводится к выбору c и τ таких, чтобы было выполнено неравенство (3.4).

Для краткости, будем использовать обозначение $\phi(t) = \varkappa\exp(-ct)$. Имеем

$$Lu = \lambda t^{\lambda-1}\phi(t)\omega(x) - cu(x,t) - u^{1+s}(x,t)\phi(t)\bigl(t^\lambda\omega''(x) + (\omega^\mu(x))''\bigr).$$

Т.к.

$$\omega''(x) = -2, \quad (\omega^\mu(x))'' = \mu\omega^{\mu-1}(x)\omega''(x) + \mu(\mu-1)\omega^{\mu-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2$$

и, следовательно,

$$t^\lambda\omega''(x) + (\omega^\mu(x))'' = -2\bigl(t^\lambda + \mu\omega^{\mu-1}(x)\bigr) + \mu(\mu-1)\omega^{\mu-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2,$$

получим

$$Lu = -\frac{c}{2}\,u(x,t) + 2\phi(t)u^{1+s}(x,t)\bigl(t^{\lambda} + \mu\omega^{\mu-1}(x)\bigr)$$
$$- \frac{c}{2}u(x,t) + \lambda t^{\lambda-1}\phi(t)\omega(x) - \mu(\mu-1)\phi(t)u^{1+s}(x,t)\omega^{\mu-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2.$$

Применяя неравенство Юнга в виде

$$ab \le a^q + b^{\frac{q}{q-1}}, \qquad q > 1,$$

при $q = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ имеем

$$u = \phi(t)(t^{\lambda}\omega + \omega^{\mu}) \ge \phi(t)t^{\lambda/q}\omega^{1/q}\omega^{\mu(q-1)/q} = \phi(t)t^{\lambda-1}\omega^{1+\frac{\mu-1}{\lambda}}.$$

Аналогично, выбирая q из условия $\frac{\lambda}{q}(1+s) = \lambda - 1$, выводим неравенство

$$u^{1+s} = \phi^{1+s}(t)\bigl(t^{\lambda}\omega + \omega^{\mu}\bigr)^{1+s}$$
$$\ge \phi^{1+s}(t)\bigl(t^{\lambda/q}\omega^{1/q}\omega^{\mu(q-1)/q}\bigr)^{1+s} = \phi^{1+s}(t)t^{\lambda-1}\omega^{1+\frac{\mu-1}{\lambda}+\mu s}.$$

Продолжим далее цепочку неравенств следующим образом

$$Lu \le \frac{u}{2}\bigl[-c + 4\phi(t)u^{s}\bigl(t^{\lambda} + \mu\omega^{\mu-1}(x)\bigr)\bigr]$$
$$- \frac{c}{2}\phi t^{\lambda-1}\omega^{1+\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) + \lambda t^{\lambda-1}\phi(t)\omega(x)$$
$$- \mu(\mu-1)\phi^{2+s}(t)t^{\lambda-1}\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}+\mu(1+s)-1}(x)\left(\omega'(x)\right)^2$$
$$= \frac{u}{2}\bigl[-c + 4\varkappa\phi(t)u^{s}\bigl(t^{\lambda} + \mu\omega^{\mu-1}(x)\bigr)\bigr]$$
$$+ \phi t^{\lambda-1}\omega(x)\Bigl[-\frac{c}{2}\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}}(x)$$
$$- \mu(\mu-1)\phi^{1+s}(t)\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}+\mu(1+s)-2}(x)\left(\omega'(x)\right)^2 + \lambda\Bigr].$$

Теперь необходимо добиться того, чтобы выражения в квадратных скобках были неположительными.

Без ограничения общности можем считать, что $\tau \le 1$, тогда в первой скобке имеем

$$-c + 4\varkappa M_0^{s}\bigl(1 + \mu(l/2)^{2(\mu-1)}\bigr) \le 0 \text{ при } c \ge C_2, \tag{3.5}$$

где постоянная C_2 зависит от значений параметров μ, l, $\varkappa$, M_0.

Во второй скобке сначала подставим значение λ в показатель степени ω:

$$-\theta = \frac{\mu-1}{\lambda} + \mu(1+s) - 2 = -\frac{(2-(1+s)\mu)^2}{1-s\mu} < 0.$$

Видим, что $\omega^{-\theta}(x) \to +\infty$ при $x \to 0$ и $x \to l$. Полагая далее, что значение τ зависит от c следующим образом $\tau = \min\{1, \frac{\ln 2}{c(1+s)}\}$ так, что

$$\exp(-c(1+s)t) \geq 1/2 \quad \text{при } t \in [0, \tau]. \tag{3.6}$$

Т.о. в дальнейшем проблема сводится к выбору подходящего значения c. С учетом (3.6) выберем число δ из условия

$$-\mu(\mu-1)\frac{\varkappa^{1+s}}{2}\omega^{-\theta}(x)\,(l-2x)^2 + \lambda \leq 0$$

при $x \in [0, \delta] \cup [l-\delta, l]$, и тогда вторая скобка будет меньше или равна нулю в достаточно малых окрестностях точек $x = 0$ и $x = l$. В оставшейся части интервала $(0, l)$ неположительность данного выражения можно обеспечить за счёт выбора достаточно большого значения параметра c. А именно, получим $\omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) \geq C_3 = \inf_{(\delta, l-\delta)} \omega^{\frac{\mu-1}{\lambda}}(x) > 0$ при $x \in [\delta, l-\delta]$ и подходящем значении константы C_3, зависящей от δ. Значит

$$-\frac{c}{2}C_3 + \lambda \leq 0 \tag{3.7}$$

при $c \geq C_4 = \frac{2\lambda}{C_3}$. Окончательно, полагаем, что $c = \max\{C_2, C_4\}$ (см. (3.5), (3.7)). Таким образом, выполнено неравенство (3.4) и, следовательно, (см. приведённые выше рассуждения) $v_n(x,t) \geq u(x,t)$ в Ω_τ.

В силу доказанной выше равномерной сходимости v_n к v и единственности полученного решения задачи (1.1) третье утверждение леммы 3 доказано. □

Замечание 3.1. *Комбинируя оценки (3.1)–(3.3), можем считать, что в предположениях (1.2), (1.3),*

$$\tilde{\varkappa}_*\omega(x) \leq v(x,t) \leq \tilde{\varkappa}^*\omega(x), \qquad x \in \Omega,\ t \in [t_0, T], \tag{3.8}$$

где параметры $\tilde{\varkappa}_*$, $\tilde{\varkappa}^*$ зависят от $\varkappa_*$, $\varkappa^*$, t_0, T, причем при $\mu = 1$ считаем, что $t_0 \geq 0$, а при $\mu > 1$, что $t_0 > 0$ и величина $\tilde{\varkappa}_*$ не ограничена при $t_0 \to 0$.

Замечание 3.2. *Для произвольного значения $T > 0$ и области Q такой, что $\overline{Q} \subseteq \Omega_T$ имеем*

$$\varkappa_0 \leq v_n(x,t) \leq \varkappa_1,$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ зависят от T и расстояния от Q до параболической границы области Ω_T. Значит, в Q функцию v_n можно рассматривать как решение невырождающегося уравнения $v_{n,t} = v_n^{1+s}v_{n,xx}$, где "коэффициент" $v_n^{1+s} \in H^{2/3,1/3}(\overline{Q})$ (см. (2.5), (2.6)). Метод локальных оценок Шаудера (см. [13]) позволяет получить оценку

$$|v_n|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_\delta)} \leq C(\delta, Q),$$

где $0 < \delta < diam\, Q/2$, $Q_\delta = \{(x,t) \in Q :\ dist((x,t), \partial\Omega_T) \geq \delta\}$ и аналогичную оценку для $v(x,t)$. Таким образом, в любой подобласти Ω_T функция $v(x,t)$ — решение задачи (1.1) *имеет классические производные и уравнение $v_t = v^{1+s}v_{xx}$ выполняется в классическом смысле.*

Этим замечанием мы будем пользоваться при доказательстве лемм 3.1–3.6

Следующий этап состоит в получении оценок сверху и снизу для функции $\frac{v_t}{v} = v^s v_{xx}$. Сравнительно легко выводится оценка снизу.

Лемма 3.2. *В смысле распределений имеет место оценка*

$$\frac{v_t(x,t)}{v(x,t)} = v^s(x,t)v_{xx}(x,t) \geq -\frac{1}{(1+s)t}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на применении принципа максимума. Обозначим $w(x,t) = \frac{v_{n,t}(x,t)}{v_n(x,t)}$. Дифференцируя равенство $wv_n = v_n^{1+s}v_{n,xx}$ по t и снова используя определение $w(x,t)$, получаем

$$Pw \equiv w_t - v_n^{1+s}w_{xx} - 2v_n^s v_{n,x}w_x - (1+s)w^2 = 0 \text{ в } \Omega_T,$$
$$w(x,t) = 0 \text{ на } \Sigma_T,$$
$$w(x,0) = v_n^s(x,0)v_{n,xx}(x,0) \text{ в } \Omega.$$

Возьмём в качестве барьера функцию $u(t) = -\frac{1}{(1+s)t}$. Очевидно, $Pu = 0$ и можем считать, что $w(x,t) \geq u(t)$ на параболической границе области Ω_T ($\lim_{t\to 0} u(t) = -\infty$). Отсюда следует (3.9) (см., например, [3]). $\square$

Лемма 3.3[Непрерывность v_x вплоть до границы.] *Для любого $t > 0$ существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to 0} v_x(x,t) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to l} v_x(x,t) \tag{3.10}$$

(*см.* [1, 12]).

Доказательство. Докажем ограниченность первого предела. В силу утверждений лемм 3, 3 и замечания 3 имеем для $0 < y < x < l/2$

$$v_x(x,t) - v_y(y,t) = \int\limits_y^x v_{zz}(z,t)\,dz = \int\limits_y^x v^{-s}(z,t)v^s(z,t)v_{zz}(z,t)\,dz$$
$$\geq -\frac{1}{(1+s)t}\int\limits_y^x [\tilde{\varkappa}_* z(l-z)]^{-s}\,dz \geq -\frac{(\tilde{\varkappa}_* l/2)^{-s}}{(1-s)(1+s)t}\left(x^{1-s} - y^{1-s}\right).$$

Здесь и ниже в случае, когда предполагается, что $t > 0$, использование оценки (3.8) является вполне оправданным, т.к. в качестве t_0 можно взять, например, или само t или $t/2$.

Обозначим $C_5 = \frac{(\tilde{\varkappa}_* l/2)^{-s}}{(1-s)(1+s)t}$. Из последнего неравенства следует, что функция $w(x,t) = v_x(x,t) + C_5 x^{1-s}$ по x не убывает, следовательно существует предел $w(x,t)$ при x стремящемся к нулю, а значит и предел $\lim_{x\to 0} v_x(x,t)$. Рассуждения для случая $x \to l$ проводятся аналогично. $\square$

Следующая лемма является подготовительной для доказательства того факта, что $v_t(0,t)=0$ и $v_t(l,t)=0$ при $t>0$.

Лемма 3.4. *Пусть* $t>0$, *тогда*

$$|v_t(x,t)| \le M_2\omega^s(x), \qquad |v_{tt}(x,t)| \le M_2\omega^{2s-1}(x). \tag{3.11}$$

Доказательство. (ср. [15,16]). Введём обозначение $B_r = \{(z,\tau): \ |z|\le r, \ |\tau| \le r\}$. Зафиксируем произвольную точку $(\overline{x},\overline{t}) \in \Omega_T$. Как и в предыдущей лемме, рассматриваем сначала окрестность точки $x=0$, поэтому для определённости полагаем, что $\overline{x} \le l/2$.

Обозначим $\gamma = \overline{x}/2$ и пусть преобразование $(z,\tau)\to(x,t)$ определяется как

$$x=\gamma z+\overline{x}, \qquad t=\gamma^{1-s}\tau+\overline{t}.$$

Данное преобразование переводит B_1 в K_γ —прямоугольник с вершинами $(\overline{x}-\gamma,\overline{t}-\gamma^{1-s})$, $(\overline{x}+\gamma,\overline{t}-\gamma^{1-s})$, $(\overline{x}+\gamma,\overline{t}+\gamma^{1-s})$, $(\overline{x}-\gamma,\overline{t}+\gamma^{1-s})$. Пусть $w(z,\tau)=\frac{1}{\gamma}v(\gamma z+\overline{x},\gamma^{1-s}\tau+\overline{t})=\frac{1}{\gamma}v(x,t)$.

Для дальнейшего хода рассуждений важно, чтобы прямоугольник K_γ принадлежал области Ω_T, а для этого, во-первых, чтобы $\overline{x}-\gamma\ge 0$ (напомним, что $\gamma=\overline{x}/2$) и, во-вторых, чтобы $\overline{t}-\gamma^{1-s}\ge 0$. Возьмём произвольное положительное число δ. Считаем далее, что $\overline{x}\le\delta$ и $\overline{t}\ge\delta^{1-s}$. Следует подчеркнуть, что для нас важен только тот факт, что K_γ непустое, "приграничное" множество. (см. замечание 3.2 к лемме 3.1).

Легко видеть, что при $(z,\tau)\in B_1$, $\gamma=\overline{x}/2$

$$1=\frac{-\gamma+\overline{x}}{\gamma}\le\frac{\gamma z+\overline{x}}{\gamma}\le\frac{\gamma+\overline{x}}{\gamma}=3. \tag{3.12}$$

Поэтому для функции

$$w(z,\tau)=\frac{1}{\gamma}v(\gamma z+\overline{x},\gamma^{1-s}\tau+\overline{t})=\frac{v(\gamma z+\overline{x},\gamma^{1-s}\tau+\overline{t})}{\gamma z+\overline{x}}\frac{\gamma z+\overline{x}}{\gamma},$$

из неравенств (3.8) и (3.12) получим

$$0<\tilde{\varkappa}_*\le w(z,\tau)\le 3\tilde{\varkappa}^*. \tag{3.13}$$

Вычислим производные функции $w(z,\tau)$:

$$w_\tau=\gamma^{-s}v_t, \qquad w_{zz}=\gamma v_{xx}.$$

Теперь легко видеть, что в B_1 функция $w(z,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$w_\tau=w^{1+s}w_{zz},$$

причём в силу (3.13) $w(z,\tau)$ можно рассматривать как решение невырождающегося квазилинейного параболического уравнения. Применяя результаты теорем 3.1, 5.1 работы [12, гл. V], получим

$$|w_\tau(z,\tau)| \le C_6, \qquad |w_{\tau\tau}(z,\tau)| \le C_7,$$

и, в частности, $|w_\tau(0,0)| \le C_6$, $|w_{\tau\tau}(0,0)| \le C_7$, где C_6, C_7 зависят от $\tilde{\varkappa}_*$, $\tilde{\varkappa}^*$. Т.к. $w_\tau = \gamma^{-s}v_t$, $w_{\tau\tau} = \gamma^{1-2s}v_{tt}$ и $\gamma = \overline{x}/2$, при достаточно малых значениях $\overline{x}$ имеем

$$v_t(\overline{x},\overline{t}) \le C_6\Big(\frac{\overline{x}}{2}\Big)^s, \qquad v_{tt}(\overline{x},\overline{t}) \le C_7\Big(\frac{\overline{x}}{2}\Big)^{2s-1}.$$

Аналогичным способом устанавливается оценка вида (3.11) в малой окрестности точки $x = l$. Внутри Ω_T ограниченность v_t, v_{tt} следует из замечания 3. □

Следствие 3.1. *При $x \in [0,l]$, $t \in [t_0,T]$ справедливы оценки*

$$\big|\big(v^{1-s}(x,t)\big)_t\big| \le C_8, \qquad \big|v^{1-2s}(x,t)v_{tt}(x,t)\big| \le C_9, \tag{3.14}$$

где C_8, C_9 зависят от t_0, T, а t_0 — произвольное положительное число.

Лемма 3.5. *Для всех $t > 0$ имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{x\to 0}\big(v^{1-s}(x,t)\big)_t = 0, \qquad \lim_{x\to l}\big(v^{1-s}(x,t)\big)_t = 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. При доказательстве придерживаемся схемы изложенной в работе [14, гл. 5]. В силу неравенства (3.9) имеем $(v^{1-s})_t \ge -\frac{(1-s)v^{1-s}}{(1+s)t}$, следовательно

$$\liminf_{x\to 0}(v^{1-s})_t \ge 0.$$

Докажем, что $\limsup_{x\to 0}(v^{1-s})_t \le 0$.

Зафиксируем произвольное положительное число t_0. Обозначим $N_\varepsilon = \{(x,t) : 0 < x < \varepsilon,\ |t-t_0| < \varepsilon\}$. Покажем, что $(v^{1-s})_t(x,t_0) \le \sigma(\varepsilon)$ при $(x,t_0) \in N_\varepsilon$, где $\sigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Доказательство проведём методом от противного. Пусть существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \in N_\varepsilon$

$$(v^{1-s})_t(x_n,t_0) \ge \delta > 0, \tag{3.16}$$

то, с одной стороны, имеем

$$v^{1-s}(x_n,t_0+\alpha\varepsilon_n^{1-s}) = (1-s)\int\limits_0^{x_n} v^{-s}(z,t_0+\alpha\varepsilon_n^{1-s})v_z(z,t_0+\alpha\varepsilon_n^{1-s})\,dz. \tag{3.17}$$

Здесь $\varepsilon_n = x_n$, а α — произвольное число, значение которого будет выбрано ниже. Т.к. производная v_x непрерывна вплоть до границы (см. лемму 3.2), вводя обозначение $\beta = v_x(0, t_0)$, можем считать, что

$$\begin{gathered} \beta - \tilde{\sigma}_n \leq v_x(x_n, t_n) \leq \beta + \tilde{\sigma}_n, \\ (\beta - \tilde{\sigma}_n)x_n \leq v(x_n, t_n) \leq (\beta + \tilde{\sigma}_n)x_n, \end{gathered} \tag{3.18}$$

здесь $(x_n, t_n) \to (0, t_0)$, $\tilde{\sigma}_n \to 0$. Оценивая далее правую часть (3.17) с учетом (3.18), получим

$$v^{1-s}(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) \leq (1-s)\frac{\beta + \tilde{\sigma}_n}{(\beta - \tilde{\sigma}_n)^s}\frac{x_n^{1-s}}{1-s} = \frac{\beta + \tilde{\sigma}_n}{(\beta - \tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}. \tag{3.19}$$

С другой стороны, по формуле Тейлора и с учётом (3.16), получим для $u = v^{1-s}$

$$\begin{aligned} u(x_n, t_0 + \alpha\varepsilon_n^{1-s}) &= u(x_n, t_0) \\ &\quad + u_t(x_n, t_0)\alpha\varepsilon_n^{1-s} + \frac{1}{2}u_{tt}(x_n, t_n^*)\left(\alpha\varepsilon_n^{1-s}\right)^2 \\ &\geq u(x_n, t_0) + \delta\alpha\varepsilon_n^{1-s} - \frac{\left(\alpha\varepsilon_n^{1-s}\right)^2}{2}\big[(1-s)v^{-s}(x_n, t_n^*)|v_{tt}(x_n, t_n^*)| \\ &\qquad + s(1-s)v^{-1-s}(x_n, t_n^*)v_t^2(x_n, t_n^*)\big]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Получим оценку снизу правой части (3.20). Применим формулу Тейлора к функции $v(x_n, t_0)$. С помощью (3.9), (3.18) имеем оценку вида

$$\begin{aligned} v(x_n, t_0) &= v(0, t_0) + v_x(0, t_0)x_n \\ &\quad + \int_0^{x_n} dy \int_0^y v^{-s}(z, t_0)v^s(z, t_0)v_{zz}(z, t_0)\, dz \\ &\geq \beta x_n - \frac{x_n^{2-s}}{(1-s)(2-s)}\frac{1}{(1+s)t_0}(\beta - \tilde{\sigma}_n)^{-s}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Положим $C_{10} = \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s)t_0}$. Из (3.21) для v^{1-s} получим

$$u(x_n, t_0) \geq \varepsilon_n^{1-s}\Big(\beta - \frac{C_{10}}{(\beta - \tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}\Big)^{1-s}.$$

Для оценки двух последних слагаемых в (3.20) используем (3.14), (3.18). Окончательно имеем

$$u(x_n, t_0+\alpha\varepsilon_n^{1-s}) \geq \varepsilon_n^{1-s}\Big(\beta - \frac{C_10}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}\Big)^{1-s} + \delta\alpha\varepsilon_n^{1-s}$$

$$- \frac{\alpha^2}{2}\varepsilon_n^{2(1-s)}\Big[(1-s)\frac{C_9}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1-s}\varepsilon^{1-s}} + \frac{s}{(1-s)}\frac{C_8^2(\beta+\tilde{\sigma}_n)^{2s}}{\varepsilon_n^{1-s}(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1+s}}\Big]$$

$$\geq \varepsilon_n^{1-s}\Big\{\Big(\beta - \frac{C_{10}}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon_n^{1-s}\Big)^{1-s} + \delta\alpha$$

$$- \frac{\alpha^2}{2}\Big[(1-s)\frac{C_9}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1-s}} + \frac{s}{1-s}\frac{(\beta+\tilde{\sigma}_n)^{2s}}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^{1+s}}C_8^2(t_0,T)\Big]\Big\},$$

а, из (3.19),

$$u(x_n, t_0+\alpha\varepsilon_n^{1-s}) \leq \frac{(\beta+\tilde{\sigma}_n)}{(\beta-\tilde{\sigma}_n)^s}\varepsilon^{1-s}.$$

Сокращая на ε_n^{1-s} и устремляя n к бесконечности, получим неравенство вида

$$\beta^{1-s} + \delta\alpha - \alpha^2 C_{11} \leq \beta^{1-s}$$

или

$$\delta\alpha \leq \frac{1}{2}\alpha^2 C_{11},$$

где C_{11} зависит от t_0, T, β, s. Полагая, что $\alpha < \delta/C_{11}$, приходим к противоречию с (3.16). Лемма 3.5 доказана. □

Наконец, оценим $\frac{v_t(x,t)}{v(x,t)} = v^s(x,t)v_{xx}(x,t)$ сверху.

Лемма 3.6. *Пусть $t_0 > 0$. Для достаточно малого значения параметра $\eta > 0$, такого что $t_0 - \eta > 0$, имеет место оценка*

$$v^s(x,t)v_{xx}(x,t) \leq M_3, \text{ при } x \in \Omega,\ t \in (t_0-\eta, t_0+\eta), \tag{3.22}$$

где M_3 не зависит от x и возможно неограниченно возрастает при $t_0 \to 0$.

Доказательство. При доказательстве данной леммы используются методы работы [17] (см. так же [18]).

Обозначим $R_{\delta,\eta} = \{(x,t) : 0 < x < \delta,\ t_0-\eta < t < t_0+\eta\}$, $t_1 = t_0-\eta$, $t_2 = t_0+\eta$. В силу леммы 3.3 для произвольного положительного параметра ε, существуют числа $\delta_1(\varepsilon)$, $\eta_1(\varepsilon)$ такие, что при $\delta < \delta_1(\varepsilon)$, $\eta < \eta_1(\varepsilon)$, $(a = v_x(0,t_0))$

$$a - \varepsilon \leq v_x(x,t) \leq a + \varepsilon, \qquad (x,t) \in R_{\delta,\eta}, \tag{3.23}$$

а из леммы 3.5 следует, что

$$v(x,t)v_{xx}(x,t) \leq \varepsilon, \qquad (x,t) \in R_{\delta,\eta}. \tag{3.24}$$

Из (3.23) следует, что

$$(a-\varepsilon)x \le v(x,t) \le (a+\varepsilon)x, \qquad (x,t)\in R_{\delta,\eta}. \tag{3.25}$$

В $R_{\delta,\eta}$ функция $p(x,t)=v^s(x,t)v_{xx}(x,t)$ (см. лемму 3.2) удовлетворяет уравнению

$$Lp = p_t - v^{1+s}p_{xx} - 2v^s v_x p_x - (1+s)p^2 = 0.$$

Будем искать барьерную функцию в виде

$$\phi(x,t) = \frac{\alpha}{x^{1-s}} + \frac{\beta}{b(t)+x^{1-s}}, \qquad b(t) = b_0(t-t_1), \tag{3.26}$$

здесь α, β, b_0 — некоторые положительные числа, значения которых будут выбраны ниже. Для производных функции ϕ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\phi_t(x,t) &= -\frac{b_0\beta}{(b(t)+x^{1-s})^2},\\
\phi_x(x,t) &= -(1-s)\frac{\alpha}{x^{2-s}} - (1-s)\frac{\beta x^{-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2},\\
\phi_{xx}(x,t) &= (1-s)(2-s)\frac{\alpha}{x^{3-s}} + (1-s)s\frac{\beta x^{-1-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2}\\
&\quad + 2(1-s)^2\frac{\beta x^{-2s}}{(b(t)+x^{1-s})^3}.
\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
L\phi = -\frac{b_0\beta}{(b(t)+x^{1-s})^2} &- v^{1+s}\Big\{(1-s)(2-s)\frac{\alpha}{x^{3-s}}\\
&+ (1-s)s\frac{\beta x^{-1-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2} + 2(1-s)^2\frac{\beta x^{-2s}}{(b(t)+x^{1-s})^3}\Big\}\\
&+ 2v^s v_x\Big\{(1-s)\frac{\alpha}{x^{2-s}} + (1-s)\frac{\beta x^{-s}}{(b(t)+x^{1-s})^2}\Big\}\\
&- (1+s)\Big[\frac{\alpha}{x^{1-s}} + \frac{\beta}{b(t)+x^{1-s}}\Big]^2.
\end{aligned}$$

Применим к последнему слагаемому неравенство Коши, тогда

$$L\phi \ge \frac{\alpha}{x^{2(1-s)}}\Big\{-(1-s)(2-s)\frac{x^{2(1-s)}}{x^{3-s}}v^{1+s}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(1-s)v^s v_x \frac{x^{2(1-s)}}{x^{2-s}} - 2(1+s)\alpha\Big\} \\
&- \frac{\beta}{(b+x^{1-s})^2}\Big\{b_0 + (1-s)s\frac{v^{1+s}}{x^{1+s}} + 2(1-s)^2\frac{v^{1+s}x^{-2s}}{b-x^{1-s}} \\
&\qquad + 2(1-s)v_x\frac{v^s}{x^s} + 2(1+s)\beta\Big\}.
\end{aligned}
$$

Используем (3.23), (3.25), тогда

$$
\begin{aligned}
L\phi \geq{}& \frac{\alpha}{x^{2(1-s)}}\big\{-(1-s)(2-s)(a+\varepsilon)^{1+s} \\
&\qquad + 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\alpha\big\} \\
&+ \frac{\beta}{(b+x^{1-s})^2}\Big\{-b_0 - (1-s)s(a+\varepsilon)^{1+s} - 2(1-s)^2\frac{(a+\varepsilon)^{1+s}x^{1-s}}{b+x^{1-s}} \\
&\qquad + 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\beta\Big\}.
\end{aligned}
$$

Напомним, что для того, чтобы при помощи функции ϕ можно было оценить функцию $p = v^s v_{xx}$ сверху, необходимо, чтобы выражение $L\phi$ было неотрицательно.

Формально устремим к нулю параметр ε в правой части последнего неравенства. В первой фигурной скобке получим

$$
\begin{aligned}
&-(1-s)(2-s)a^{1+s} + 2(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\alpha \\
&\qquad = s(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\alpha > 0, \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

если α достаточно мало. Вторая фигурная скобка при $\varepsilon = 0$ равна выражению

$$
-b_0 - (1-s)sa^{1+s} - 2(1-s)^2\frac{a^{1+s}x^{1-s}}{b+x^{1-s}} + 2(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\beta.
$$

Очевидно, что $\frac{x^{1-s}}{b+x^{1-s}} \leq 1$. Потребуем, чтобы

$$
-(1-s)(2-s)(a+\varepsilon)^{1+s} + 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\alpha \geq 0, \qquad (3.28)
$$

$$
\begin{aligned}
&-b_0 - (1-s)s(a+\varepsilon)^{1+s} - 2(1-s)^2\frac{(a+\varepsilon)^{1+s}x^{1-s}}{b+x^{1-s}} \\
&\qquad + 2(1-s)(a-\varepsilon)^{1+s} - 2(1+s)\beta \geq 0, \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

а при $\varepsilon = 0$

$$
s(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\alpha > 0, \qquad (3.30)
$$

$$
s(1-s)a^{1+s} - 2(1+s)\beta - b_0 > 0. \qquad (3.31)
$$

Пока не уточняя значений α, β, b_0, перейдем к сравнению $p = v^s v_{xx}$ и ϕ на параболической границе множества $R_{\delta,\eta}$. Из (3.24), (3.25) следует, что

$$p(x,t) = v^s(x,t)v_{xx}(x,t) = \frac{v(x,t)v_{xx}}{v^{1-s}(x,t)} \le \frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}x^{1-s}}. \tag{3.32}$$

На боковой границе $x = \delta$ потребуем

$$p(\delta,t) \le \frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}\delta^{1-s}} \le \frac{\beta}{2\delta^{1-s}} \le \frac{\beta}{b_0(t-t_1)+\delta^{1-s}} = \phi(\delta,t).$$

Последние соотношения будут очевидно выполнены, если

$$\frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}} \le \frac{\beta}{2} \tag{3.33}$$

и

$$b_0\eta \le \delta^{1-s}. \tag{3.34}$$

На нижней границе $t = t_1$, предполагая, что условие (3.33) уже выполнено, получим

$$p(x,t_1) \le \frac{\varepsilon}{(a-\varepsilon)^{1-s}x^{1-s}} \le \frac{\beta}{x^{1-s}} = \phi(x,t_1).$$

При $x = 0$ функции ϕ и, вообще говоря, p обращаются в бесконечность, поэтому нужно сначала сравнить их значения в некоторой более узкой приграничное полосе. Для фиксированного α (считаем, что имеют место (3.28) и (3.30)) для произвольной точки $A(0,t)$, где $t \in (t_1,t_2)$, вследствие леммы 3.5 существует шар B_A с центром в точке A такой, что

$$vv_{xx} \le \alpha(a-\varepsilon)^{1-s} \text{ в } B_A \cap \Omega_T. \tag{3.35}$$

Из (3.25) получим

$$\phi(x,t) \ge \frac{\alpha}{x^{1-s}} = \frac{\alpha(a-\varepsilon)^{1-s}}{(a-\varepsilon)^{1-s}x^{1-s}} \ge \frac{v(x,t)v_{xx}(x,t)}{v^{1-s}(x,t)} = p(x,t)$$
$$\text{при } (x,t) \in B_A \cap \Omega_T.$$

Отрезок $\Gamma = \{x = 0,\ t \in [t_1,t_2]\}$ можно покрыть конечным числом шаров B_{A_i} и, следовательно, существует, зависящее от значения a, число $\gamma \in (0,\delta)$ такое, что

$$\phi(x,t) \ge p(x,t) \;\text{ в } R_{\gamma,\eta}.$$

Т.о. функция ϕ является верхним барьером для функции p в области $R_{\delta,\eta}$, если выполнены условия (3.28)–(3.31), (3.33), (3.34). Устремляя же α к нулю, получим

$$p(x,t) \le \frac{\beta}{b_0(t-t_1)+x^{1-s}} \le \frac{2\beta}{b_0\eta} \quad \text{при } (x,t) \in R_{\delta,\eta/2}. \tag{3.36}$$

Вернёмся к выбору значений α, β, b_0, ε. Для α есть только одно ограничение сверху. Если $\alpha \le \frac{s(1-s)}{4(1+s)} a^{1+s}$, то (3.30) выполнено. Аналогично потребуем, чтобы в (3.31) были выполнены неравенства

$$b_0 < \frac{s(1-s)}{4}\, a^{1+s}, \qquad \beta < \frac{s(1-s)}{(1+s)8}\, a^{1+s},$$

а в (3.28), (3.29), (3.33) будем полагать, что ε достаточно мало. В (3.34) полагаем, что $b_0 = \delta^{1-s}$, $\eta(\varepsilon) \le 1$. Т.о., все требуемые условия выполнены и

$$p(x,t) = v^s(x,t) v_{xx}(x,t) \le C(a,s,\delta,\eta) \quad \text{при } (x,t) \in R_{\delta,\eta/2}. \tag{3.37}$$

Из оценок (3.9), (3.37) и замечания 3.2 следует оценка (3.22). □

Таким образом, из оценок (3.9), (3.22) следует неравенство

$$\begin{gathered} \Big|\frac{v_t(x,t)}{v(x,t)}\Big| = |v^s(x,t) v_{xx}(x,t)| \le M_4(t_0, T, \varkappa_*, \varkappa^*, l, M_0, M_1, M_3) \\ \text{при } (x,t) \in \Omega_{t_0,T} \end{gathered} \tag{3.38}$$

для произвольных $0 < t_0 < T$. Данная оценка служит основой для дальнейшего повышения регулярности обобщённого решения задачи (1.1). С этой целью нам необходимо рассмотреть также линейную задачу (1.8).

4 Линейная задача. Основные результаты

Положим $D = (0, +\infty)$, $f(x) = x^{q/2} - (l-x)^{q/2}$. Функции $d_D(x,y) = |x^{q/2} - y^{q/2}|$, $d_\Omega(x,y) = |f(x) - f(y)|$ будут характеризовать “расстояние” между точками x, y, принадлежащими, соответственно, либо D, либо Ω. Обозначим $\rho_D(x) = x$, $\rho_\Omega(x) = \omega(x)$.

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Подразумевая под Q одно из множеств D или Ω, определим функциональные пространства $H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$, $H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ как множества функций с ограниченными нормами:

$$\|u\|_{H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|^{(\alpha)}_{q,Q_T} = \sup_{Q_T} |u| + \langle\langle u \rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T},$$

$$\|u\|_{H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|^{(\alpha)}_{q,\rho,Q_T} = |\rho_Q^{-1} u|^{(\alpha)}_{q,Q_T},$$

где

$$\langle\langle u \rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T} = \langle u \rangle^{(\alpha)}_{q,x,Q_T} + \langle u \rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_T},$$

$$\langle u \rangle^{(\alpha)}_{q,x,Q_T} = \sup_{(x,t),(y,t)\in Q_T} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{d_Q^\alpha(x,y)},$$

$$\langle u \rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_T} = \sup_{(x,t),(y,\tau)\in Q_T} \frac{|u(x,t) - u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha/2}}.$$

Введем далее полунормы

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{q,Q_T} = \langle u\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,Q_T} + \langle\langle u_x\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T},$$
$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{q,Q_T} = \langle\langle \rho_Q^{-1} u_t\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T} + \langle\langle \rho_Q^{s} u_{xx}\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,Q_T} + \langle u_x\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,Q_T}.$$

Обозначим через $H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_\tau)$ и $H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$, соответственно, пространства с нормами:

$$\|u\|_{H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|^{(1+\alpha)}_{q,Q_T} = \sup_{Q_T}|u| + \sup_{Q_T}|u_x| + \langle\langle u\rangle\rangle^{(1+\alpha)}_{q,Q_T}$$

и

$$\|u\|_{H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|^{(2+\alpha)}_{q,Q_T}$$
$$= |u|^{(\alpha)}_{q,Q_T} + |\rho_Q^{-1}u_t|^{(\alpha)}_{q,Q_T} + |\rho_Q^{s}u_{xx}|^{(\alpha)}_{q,Q_T} + \langle u_x\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_T}.$$

Если $u(x,0) = 0$ и $u \in H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$ $(H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau))$, будем говорить, что $u \in H_{q,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$ $(H_{q,\rho,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_\tau))$. Принадлежность функции u пространству $H_{q,0}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q}_\tau)$ означает, что $u \in H_q^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q}_\tau)$ и $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$. Для функций $u(x)$, т.е. зависящих только от x, аналогично $H_q^{k+\alpha,k+\alpha/2}(\overline{Q}_\tau)$ $(k=0,1,2)$ определим пространства $H_q^{k+\alpha}(\overline{Q})$, опуская в соответствующих определениях константы Гёльдера по переменной t.

В задаче (1.8) положим

$$u_1(x) = a(x,0)\rho_\Omega^{1+s}u''_{0,xx} + f(x,0).$$

Предполагаем, что

$$0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1, \qquad (x,t)\in\Omega_T, \tag{4.1}$$

и выполнены условия согласования

$$u_0(x) = 0, \qquad u_1(x) = 0 \qquad \text{при } x = 0, l. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $a \in H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f \in H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $u_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и имеют место условия* (4.1), (4.2), *тогда существует единственное решение задачи* (1.8) $u \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, *причем справедлива оценка*

$$|u|^{(2+\alpha)}_{q,\Omega_T} \le C(l,T,a_0,a_1,|a|^{(\alpha)}_{q,\Omega_T})\big(|f|^{(\alpha)}_{q,\rho,\Omega_T} + |u_0|^{(2+\alpha)}_{q,\Omega}\big). \tag{4.3}$$

Теорема 4.1 существенно используется в пункте 6 при доказательстве основного результата работы теоремы 1.1. Доказательство теоремы 4.1 основано на методе построения регуляризатора (см. [13], гл. IV]). В рамках принятого подхода ход рассуждений незначительно отличается от стандартного и состоит в следующем. Сначала исходная задача (1.8) сводится к задаче с нулевыми начальными данными, а затем строится регуляризатор, т.е. оператор, обращающий главную линейную часть начально-краевой задачи с "замороженным" коэффициентом $a(x,t)$ (см. также [21]). Мы опускаем эти построения и приведем доказательство только лишь разрешимости и коэрцитивных оценок для модельной задачи, которые лежат в основе всех построений. Отметим, что выбор указанных выше функциональных пространств диктуется именно модельной задачей. Основным моментом является исследование модельной задачи. В модельной задаче требуется найти функцию $w(x,t)$ по условиям

$$\begin{aligned} w_t = x^{1+s} w_{xx} + f(x,t), \qquad & (x,t) \in D_T, \\ w(0,t) = 0, \qquad & t \in (0,\tau), \\ w(x,0) = w_0(x), \qquad & x \in D. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Будем предполагать, что $f \in H^{\alpha,\alpha/2}_{q,\rho}(\overline{D}_T)$, $w_0 \in H^{2+\alpha}_q(\overline{D})$. Для произвольного положительного числа L обозначим $D_L = (0, L)$.

Теорема 4.2. *Справедлива оценка*

$$\langle\langle w_t/x \rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T} + \langle\langle x^s w_{xx} \rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T} + \langle w_x \rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,D_{L,T}} \\ \le c(L,T)\big(\langle\langle f/x \rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T} + \langle\langle w_0 \rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{q,D}\big). \tag{4.5}$$

5 Оценки решения модельной задачи (4.4)

Для дальнейших рассуждений достаточно предположить, что $f(x,0) = 0$, т.е. $f \in H^{\alpha,\alpha/2}_{q,\rho,0}(\overline{D}_T)$.

Для того, чтобы построить функцию Грина задачи (4.4), применим преобразование Лапласа по переменной t и для полученного обыкновенного уравнения второго порядка стандартным способом строим функцию Грина. После обратного преобразования Лапласа получаем искомую функцию Грина

$$G(x,\xi,t) = c_q t^{-1-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp(-(u^2+v^2)) z^{1/q} I_{1/q}(z), \tag{5.1}$$

где $q = 1 - s$, $I_{1/q}(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, $u = \xi^{q/2}/(qt^{1/2})$, $v = x^{q/2}/(qt^{1/2})$, $z = 2uv$, c_q — вполне определенная постоянная, такая что

$$\int_0^\infty \xi G(x,\xi,t)\, d\xi = x. \tag{5.2}$$

С помощью $G(x,\xi,t)$ решение задачи (4.4) представляется в виде суммы двух потенциалов

$$w(x,t) = w^{(1)}(x,t) + w^{(2)}(x,t) \\ = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi + \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t) w_0(\xi)\, d\xi.$$

Подобные задачи и построения ранее рассматривались в работах [20, 21].

Используя представление функции $I_p(z)$ в виде ряда и её асимптотическое разложение при $z \to \infty$, нетрудно получить неравенства

$$\begin{gathered} |I_p(z)| \le \begin{cases} cz^p, & z \le 1, \\ c\exp(z)\ z^{-1/2}, & z \ge 1. \end{cases} \\ \Big|\frac{q}{2} z I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\Big| \le c\ z^{1/q+2} \text{ при } z \le 1. \\ \big|I_{1/q}(z) - I_{1/q-1}(z)\big| \le c\exp(z)\ z^{-3/2} \text{ при } z > 1, \\ \Big|2(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)) + \frac{1}{z} I_{1/q-1}(z) - \frac{1}{qz}(I_{1/q-1}(z) + I_{1/q}(z))\Big| \\ \le c\exp(z)\ z^{-5/2} \text{ при } z > 1, \end{gathered} \tag{5.3}$$

которые полезны при получении следующих оценок.

Лемма 5.1. *Функция Грина $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|D_t^k G(x,\xi,t)| \le C_k t^{-k-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \exp(-\gamma_k (u-v)^2) \begin{cases} z^{\frac{2}{q}}, & z \le 1, \\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & z > 1, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$|D_t^k D_x G(x,\xi,t)| \le C_k t^{-k-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \\ \times \exp\big(-\gamma_k (u-v)^2\big) \frac{v}{x} \begin{cases} z^{\frac{2}{q}-1}(1+v), & z \le 1, \\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v/z), & z > 1, \end{cases} \tag{5.5}$$

где $\gamma_k \in (0,1)$, $k = 0,1,2,$

$$|(G(x,\xi,t)\xi/x)_x| \le C t^{-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \\ \times \exp\big(-\gamma(u-v)^2\big) \Big(\frac{u}{v}\Big)^{\frac{2}{q}} \frac{1}{x} \begin{cases} z^{\frac{2}{q}}(v^2+z^2), & z \le 1, \\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v), & z > 1, \end{cases} \tag{5.6}$$

$$|(G(x,\xi,t)\xi/x)_{xt}| \le Ct^{-2-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}}$$

$$\times \exp\bigl(-\gamma(u-v)^2\bigr)\Bigl(\frac{u}{v}\Bigr)^{\frac{2}{q}} \frac{1}{x} \begin{cases} z^{\frac{2}{q}}(v^2+z^2), & z \le 1, \\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v+\frac{v^2}{z}), & z > 1, \end{cases} \tag{5.7}$$

где $\gamma \in (0,1)$.

Вследствие громоздкости вычислений при доказательстве леммы кратко опишем доказательство оценки для G_{xt}, остальные оценки получаются аналогично. Из (5.1) и равенства $\bigl(z^{1/q}I_{1/q}(z)\bigr)_z = z^{1/q}I_{1/q-1}(z)$ (см. [19]) следует

$$G_x = c_q t^{-1-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \exp\bigl(-(u^2+v^2)\bigr)\frac{v}{x} z^{1/q}\left\{uI_{1/q-1}(z) - vI_{1/q}(z)\right\}.$$

При дальнейшем дифференцировании G_x по t используем равенства

$$I'_{1/q}(z) = I_{1/q-1}(z) - \frac{1}{qz}I_{1/q}(z),$$
$$I'_{1/q-1}(z) = I_{1/q}(z) + \frac{1}{z}\Bigl(\frac{1}{q}-1\Bigr)I_{1/q-1}(z)$$

и получаем

$$\begin{aligned} G_{xt} = c_q t^{-2-\frac{s}{q}} u^{-\frac{2(1+s)}{q}} \exp(-(u^2+v^2))\frac{v}{x} z^{1/q}\Bigl(&\bigl(-2+(u-v)^2\bigr) \\ &\times \left[(u-v)I_{1/q-1}(z) + v\left\{I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right\}\right] \\ &+ z\Bigl[(u-v)\Bigl\{I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z) - \frac{1}{z}\Bigl(\frac{1}{q}-1\Bigr)I_{1/q-1}(z)\Bigr\} \\ &+ v\Bigl\{2\left(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right) + \frac{1}{z}I_{1/q}(z) - \frac{1}{qz}\left(I_{1/q-1}(z) + I_{1/q}(z)\right)\Bigr\}\Bigr]\Bigr). \end{aligned}$$

Далее, применяя соответствующие оценки из (5.3) для оценки выражений в фигурных скобках и очевидное неравенство

$$\exp\bigl(-u^2-v^2\bigr)|u-v|^a \le \exp\bigl(-(u-v)^2\bigr)|u-v|^a \le c_a \exp\bigl(-\gamma_a(u-v)^2\bigr),$$

где c_a, γ_a — некоторые положительные постоянные, приходим к оценке (5.5) при $k=1$.

Лемма 5.2. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x}\big|D_t^k G(x,\xi,t)\big||\xi^{q/2}-x^{q/2}|^\alpha\,d\xi \le c_k t^{-k+\alpha/2}, \quad k=0,1,2; \tag{5.8}$$

$$\int\limits_0^\infty \xi\big|D_t^k G_x(x,\xi,t)\big||\xi^{q/2}-x^{q/2}|^\alpha\,d\xi \le c_k t^{-k+\alpha/2}(1+v), \quad k=0,1; \tag{5.9}$$

$$\int\limits_0^\infty \Big|D_t^k\Big(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Big)_x\Big||\xi^{q/2}-x^{q/2}|^\alpha\,d\xi \le c_k t^{-k+\alpha/2}\frac{v}{x}, \quad k=0,1. \tag{5.10}$$

При доказательстве леммы используются оценки (5.4)–(5.7) и оценки вида (см. [10]):

$$\begin{gathered}\int\limits_{1/2v}^\infty u^\sigma \exp\big(-\gamma(u-v)^2\big)\,du \le c\left\{\begin{array}{ll} v^\sigma, & v\ge 1\\ \exp(-\frac{\gamma}{16v^2}), & v\le 1\end{array}\right\} \le cv^\sigma,\\ \int\limits_0^{1/2v} u^\sigma \exp\big(-\gamma(u-v)^2\big)\,du \le c\left\{\begin{array}{ll} \exp(-\gamma v^2), & v\ge 1\\ 1, & v\le 1\end{array}\right\} \le c\exp(-\gamma v^2),\end{gathered} \tag{5.11}$$

при $\sigma>-1, \gamma>0$.

Например, из (5.7) следует, что $(q=1-s)$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \Big|\Big(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Big)_{xt}\Big|\,d\xi &= \int\limits_0^\infty \Big|\Big(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Big)_{xt}\Big| q^{\frac{2}{q}}t^{\frac{1}{q}}u^{\frac{2}{q}-1}\,du\\ &\le c\Bigg(\int\limits_0^{1/(2v)} t^{-1}u^{\frac{2}{q}-1-\frac{2(1+s)}{q}}\exp\big(-\gamma(u-v)^2\big)\\ &\qquad\times\Big(\frac{u}{v}\Big)^{2/q}x^{-1}z^{\frac{q}{2}}(v^2+z^2)\,du\\ &\quad+\int\limits_{1/(2v)}^\infty t^{-1}u^{\frac{2}{q}-1-\frac{2(1+s)}{q}}\exp\big(-\gamma(u-v)^2\big)\end{aligned}$$

$$\times\Big(\frac{u}{v}\Big)^{2/q}x^{-1}z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+v+v^2/z)\,du\Bigg),$$

а после применения неравенств (5.11) получаем оценку

$$\int\limits_0^\infty\Big|\Big(\frac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\Big)_{xt}\Big|\,d\xi$$
$$\leq\frac{c}{xt}\left(v^2\exp(-\gamma v^2)+\left\{\begin{array}{ll}v, & v>1,\\ v^{-\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\exp\Big(-\frac{\gamma}{16v^2}\Big), & v\leq 1\end{array}\right\}\right),$$

которая в виду неравенства $z^pe^{-\gamma z^2}\leq\text{const}$, $p>0$, $\gamma>0$, приводит к оценке (5.10) при $k=1$.

Лемма 5.3. *Для функций* $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, *образующих решение модельной задачи* (4.4), *справедливы оценки*

$$\Big\langle\Big\langle\frac{1}{x}w_t^{(1)}\Big\rangle\Big\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}+\langle\langle x^sw_{xx}^{(1)}\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}+\langle w_x^{(1)}\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)}$$
$$\leq c(L,T)\langle\langle f/x\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)},\quad(5.12)$$

$$\Big\langle\Big\langle\frac{1}{x}w_t^{(2)}\Big\rangle\Big\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}+\langle\langle x^sw_{xx}^{(2)}\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}+\langle w_x^{(2)}\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)}$$
$$\leq c(L,T)\langle\langle w_0\rangle\rangle_{q,D}^{(2+\alpha)},\quad(5.13)$$

где постоянная $c(L,T)$ *остается ограниченной при* $T\to 0$.

Доказательство. При доказательстве леммы ограничимся рассмотрением полунорм $\langle w_x^{(1)}\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)}$ и $\langle\langle x^{-1}w_t^{(2)}\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}$. Остальные слагаемые оцениваются подобным образом. Используя равенство (5.2), получаем представление

$$w_x^{(1)}(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty\xi G_x(x,\xi,t-\tau)\Big[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi}-\frac{f(x,\tau)}{x}\Big]\,d\xi+\int\limits_0^t\frac{f(x,\tau)}{x}\,d\tau.$$

Для определенности полагаем $\Delta t=t_1-t_2\geq 0$. После несложных преобразований получаем

$$w_x^{(1)}(x,t_1)-w_x^{(1)}(x,t_2)$$
$$=\int\limits_{t_1-2\Delta t}^{t_1}d\tau\int\limits_0^\infty\xi G_x(x,\xi,t_1-\tau)\Big[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi}-\frac{f(x,\tau)}{x}\Big]d\xi$$

$$
-\int\limits_{t_1-2\Delta t}^{t_2} d\tau \int\limits_0^\infty \xi G_x(x,\xi,t_2-\tau)\Big[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi}-\frac{f(x,\tau)}{x}\Big]d\xi
$$

$$
+\int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_0^\infty \xi\big(G_x(x,\xi,t_1-\tau)-G_x(x,\xi,t_2-\tau)\big)\Big[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi}-\frac{f(x,\tau)}{x}\Big]d\xi
$$

$$
+\int\limits_{t_2}^{t_1}\frac{f(x,\tau)}{x}\,d\tau \equiv i_1+i_2+i_3+i_4.
$$

Из свойств функции $f(x,t)$ и определения параметров u, v следует

$$
\Big|\frac{f(\xi,\tau)}{\xi}-\frac{f(x,\tau)}{x}\Big| \le \Big\langle\frac{f}{x}\Big\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}\big|\xi^{q/2}-x^{q/2}\big|^\alpha
$$

$$
= c_q\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}|u-v|^\alpha\tau^{\alpha/2}.
$$

Для дальнейших оценок полезно заметить, что, когда в подынтегральных выражениях появляется множитель вида

$$
F(x,\xi,t)=\big|\xi^{q/2}-x^{q/2}\big|^\alpha\exp\big(-(u-v)^2\big),
$$

мы пользуемся оценкой вида

$$
F(x,\xi,t)\le \mathrm{c}\ t^{\alpha/2}\,|u-v|^\alpha\exp\big(-(u-v)^2\big)\le \mathrm{c}\ t^{\alpha/2}\exp\big(-\gamma(u-v)^2\big),
$$

$$
\gamma\in(0,1).
$$

С учётом этого замечания и (5.9) получаем

$$
|i_1|\le c\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}\int\limits_0^{2\Delta t}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\Big(1+\frac{x^{q/2}}{\tau^{1/2}}\Big)\,d\tau
$$

$$
\le c\,\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}\big((\Delta t)^{\frac12}+x^{q/2}\big)(\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.
$$

Слагаемое i_2 оценивается аналогично.

Для i_3 сначала запишем оценку в виде

$$
|i_3|\le\int\limits_0^{t_1-2\Delta t}d\tau\int\limits_{t_2}^{t_1}d\theta\int\limits_0^\infty\xi\,|G_{x\theta}(x,\xi,\theta-\tau)|\,\Big|\frac{f(\xi,\tau)}{\xi}-\frac{f(x,\tau)}{x}\Big|\,d\xi.
$$

Поскольку $f\in H^{\alpha,\alpha/2}_{q,\rho,0}(\overline{D}_T)$, то $f(x,t)=0$ при $t<0$ и, следовательно, нужно рассмотреть только случай $t_1-2\Delta t>0$. Снова применяя неравенство (5.9), имеем

$$
|i_3|\le c\,\langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}\int\limits_0^{t_1-2\Delta t}d\tau\int\limits_{t_2}^{t_1}|\theta-\tau|^{\frac{\alpha}{2}-1}\bigg(1+\frac{x^{q/2}}{|\theta-\tau|^{1/2}}\bigg)\,d\theta.
$$

Вследствие неравенства $t_1 - 2\Delta t > 0$ имеем оценку $\Delta t < \theta - \tau < t_1$, так, что внутренний интеграл в правой части этого неравенства сходится. Отсюда

$$|i_3| \le c\big(t_1^{1/2} + x^{q/2}\big)\, \langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} |\theta-\tau|^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}}\, d\theta$$
$$\le c\big(t_1^{1/2} + x^{q/2}\big)\, \langle f/x\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T}\, (\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

При оценке i_4 используется равенство $f(x,0) = 0$ и гельдеровость с показателем $\alpha/2$ относительно переменной t функции $f(x,t)$. Отсюда

$$|i_4| \le \ \langle f/x\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \int\limits_{t_2}^{t_1} \tau^{\alpha/2}\, d\tau \le c t_1^{1/2}\, \langle f/x\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\, (\Delta t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Суммируя оценки для i_k, $k = \overline{1,4}$, получаем

$$\langle w_x^{(1)}\rangle^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{t,D_{L,T}} \le C\big(T^{1/2} + L^{q/2}\big)\, \langle\langle f/x\rangle\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T}\,.$$

Переходим к оценке функции $w_t^{(2)}$. Функция Грина $G(\xi,x,t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $G_t = (\xi^{1+s}G)_{\xi\xi}$, поэтому $w_t^{(2)}(x,t) = \int_0^\infty (\xi^{1+s}G)_{\xi\xi}(x,\xi,t) w_0(\xi)\, d\xi$, и после интегрирования по частям

$$\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x} G(x,\xi,t)\xi^s w_0''(\xi)\, d\xi.$$

Используя равенство (5.2), получим

$$\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t_1) - \frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t_2) = \int\limits_{t_2}^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x} G_\tau(x,\xi,\tau)\, \big[\xi^s w_0''(\xi) - x^s w_0''(x)\big]\, d\xi.$$

Применение оценки (5.8) дает

$$\Big|\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t_1) - \frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t_2)\Big| \le c\, \big\langle x^s w_0''\big\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D} \int\limits_{t_2}^{t_1} \tau^{\alpha/2-1}\, d\tau,$$

и, следовательно,

$$\Big\langle \frac{1}{x} w_t^{(2)}\Big\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \le c\, \big\langle x^s w_0''\big\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D}\,. \tag{5.14}$$

При оценке константы Гельдера по x для функции $\frac{1}{x}w_t^{(2)}$ будем различать два случая:

$$1)\ t < h^2 \equiv \left|\xi^{q/2} - x^{q/2}\right|^2, \qquad 2)\ t \geq h^2.$$

В первом случае необходимая оценка следует из (5.14). Действительно,

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t)\Big| &\leq \Big|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,0)\Big| \\
&+ \Big|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,0) - \frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,0)\Big| + \Big|\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,0) - \frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t)\Big| \\
&\leq 2\Big\langle \frac{1}{x}w_t^{(2)}\Big\rangle_{t,D_T}^{(\alpha/2)} t^{\alpha/2} + \left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha \leq c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Во втором случае снова за счет (5.2) получим представление

$$\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t) = \int_y^x d\theta \int_0^\infty \Big(\frac{\xi}{\theta}G(\theta,\xi,t)\Big)_\theta \left[\xi^s w_0''(\xi) - \theta^s w_0''(\theta)\right] d\xi.$$

Обозначим $\overline{v} = \frac{\theta^{q/2}}{qt^{1/2}}$. Применение неравенства (5.10) дает

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t) - \frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t)\Big| &\leq c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} \left|\int_y^x t^{\alpha/2}\frac{\overline{v}}{\theta}\, d\theta\right| \\
&\leq c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} t^{\frac{\alpha-1}{2}} \int_y^x \theta^{\frac{q}{2}-1}\, d\theta \leq c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Из (5.14)–(5.16) следует $\langle\langle x^{-1}w_t^2\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} \leq c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)}$, что и требовалось доказать. $\square$

Из оценок (5.12)–(5.13) следует оценка (4.5).

6 Доказательство Теоремы 1.1

Лемма 6.1. *Для обобщенного решения задачи* (1.1) *справедливы следующие оценки*

$$|v_x(x,t_2) - v_x(x,t_1)| \leq C_{12}\, |t_2 - t_1|^{\frac{1-s}{2-s}} \text{ при } (x,t_2),(x,t_1) \in \Omega_{t_0,T}, \quad (6.1)$$

$$|v_x(x_2,t) - v_x(x_1,t)| \leq C_{13} d_\Omega(x_1,x_2) \text{ при } (x_2,t),(x_1,t) \in \Omega_{t_0,T}, \quad (6.2)$$

где $q = 1 - s$, а постоянные C_{12}, C_{13} зависят от l, t_0, T, $\tilde{\varkappa}_*$, $\tilde{\varkappa}^*$, M_4.

Доказательство. Сначала докажем (6.1). Пусть x_1, x_2 — произвольные числа такие, что $x_1 < x_2 \leq l/2$ (аналогично можно рассмотреть вариант, когда $l/2 \geq x_2 > x_1$). Будем следовать схеме доказательства леммы 3.1 [13, гл. II].

Из (3.8), (3.38) предварительно получим

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} (v_x(z,t) - v_x(x_1,t))\,dz\right| \le \int\limits_{x_1}^{x_2} dz \int\limits_{x_1}^{z} |v^{-s}(y,t)||v^s(y,t)v_{yy}(y,t)|\,dy$$

$$\le \frac{M_4}{\tilde{\varkappa}_*^s}\int\limits_{x_1}^{x_2} dz \int\limits_{x_1}^{z} y^{-s}\,dy = C_{14}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{z^{1-s} - x_1^{1-s}}{1-s}\,dz$$

$$\le C_{15}\int\limits_{x_1}^{x_2} (z-x_1)^{1-s}\,dz \le C_{16}(x_2-x_1)^{2-s}, \quad (6.3)$$

где C_{14}, C_{15} и C_{16} зависят от M_4, $\tilde{\varkappa}_*$, s, l. Далее, имеем следующее равенство ($t_1 \le t_2$)

$$v(x_2,t_2) - v(x_1,t_2) - v(x_2,t_1) + v(x_1,t_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} v_x(z,t_2)\,dz - \int\limits_{x_1}^{x_2} v_x(z,t_1)\,dz$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(v_x(z,t_2) - v_x(x_1,t_2)\right)\,dz - \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(v_x(z,t_1) - v_x(x_1,t_1)\right)\,dz$$

$$+ \left(v_x(x_1,t_2) - v_x(x_1,t_1)\right)(x_2-x_1).$$

Отсюда

$$v_x(x_1,t_2) - v_x(x_1,t_1)$$

$$= \frac{1}{x_2-x_1}\Bigg\{\int\limits_{x_1}^{x_2} (v_x(z,t_1) - v_x(x_1,t_1))\,dz - \int\limits_{x_1}^{x_2} (v_x(z,t_2) - v_x(x_1,t_2))\,dz$$

$$+ v(x_2,t_2) - v(x_1,t_2) - v(x_2,t_1) + v(x_1,t_1)\Bigg\}. \quad (6.4)$$

Из последнего неравенства, (2.4), (3.38) и (6.3) получим

$$|v_x(x_1,t_2) - v_x(x_1,t_1)|$$

$$\le \frac{2}{(x_2-x_1)}\left\{C_{16}(x_2-x_1)^{2-s} + M_0M_4\,|t_2-t_1|\right\}$$

$$\le C_{17}(x_2-x_1)^{1-s} + 2M_0M_4\frac{t_2-t_1}{x_2-x_1}.$$

Минимизируя правую часть по x_2, получим $(x_2-x_1)^{2-s} = \frac{2M_0M_4}{C_{17}(1-s)}(t_2-t_1)$ и, следовательно, имеет место оценка (6.1). Рассуждая аналогично тому, как было получено неравенство (6.3), выводим оценку (6.2). □

Для произвольного $t_0 > 0$ определим бесконечно дифференцируемую функцию $\phi(t)$ такую, что $\phi(t) = 0$ при $t \le \frac{t_0}{2}$ и $\phi(t) = 1$ при $t \ge t_0$. Введем функцию $w(x,t) = \phi(t)v(x,t)$. Имеем

$$\begin{aligned} w_t &= v^{1+s}(x,t)w_{xx} + \phi_t(t)v(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_{t_0/2,T}, \\ & w(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma_{t_0/2,T}, \\ & w(x,t_0/2) = 0, \qquad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Положим $\beta_1 = \frac{1-s}{2-s}$. В случае $2\beta_1 \ge \alpha$ полагаем, что $\alpha_1 = \alpha$, а при $2\beta_1 < \alpha$ возьмем $\alpha_1 = 2\beta_1$. Поскольку $v(0,t) = v(l,t) = 0$, функцию $v(x,t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{l}\left\{(l-x)v(x,t) + xv(x,t)\right\} \\ &= \frac{1}{l}\left\{(l-x)\int_0^x v_z(z,t)dz - x\int_x^l v_z(z,t)\,dz\right\} \\ &= \frac{1}{l}\left\{x(l-x)\int_0^1 v_z(z,t)\big|_{z=\lambda x}d\lambda - x(l-x)\int_0^1 v_z(z,t)\big|_{z=x+\lambda(l-x)}\,d\lambda\right\} \\ &= \frac{\omega(x)}{l}\int_0^1 v_z(z,t)\Big|_{z=x+\lambda(l-x)}^{z=\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу (6.5) как линейную задачу вида (1.8) с $a(x,t) = \frac{v^{1+s}(x,t)}{\omega^{1+s}(x)}$ и $f(x,t) = \phi_t(t)v(x,t)$. Из оценки (3.8) следует неравенство $a(x,t) \ge \tilde{\varkappa}_* > 0$. Применяя формулу конечных приращений и оценки (6.1), 6.2) леммы 6.1, стандартными рассуждениями убеждаемся в том, что

$$a \in H_q^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0/2,T}), \qquad f \in H_{q,\rho}^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0/2,T}).$$

Таким образом, функции $a(x,t)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Следовательно, решение задачи (6.5) $w \in H_q^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0/2,T})$, а тогда, по определению, $v \in H_q^{2+\alpha_1,1+\alpha_1/2}(\overline{\Omega}_{t_0,T})$. Теперь при $2\beta_1 \ge \alpha$ теорема 1.1 доказана, в противном случае (т.е. $2\beta_1 < \alpha$) нужно взять $\beta_2 = \frac{1+\alpha_1}{2}$ и повторить вышеизложенную процедуру.

Работа была частично поддержана грантом 01.07/00130 ДФФД Украины и грантом INTAS 03-51-5007.

Список литературы

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, *A numerical treatment of a superdegenerate equation with application to the porous medium equation* // Quarterly of Applied Mathematics, **48** (1990), 133–152.

[2] А. С. Калашников, *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Успехи мат. наук, **42** (1987), 135–176.

[3] D. G. Aronson, *The porous medium equation* // Lect. Notes Math., **1224** (1986), 1–46.

[4] M. Winkler, *Boundary behaviour in strongly degenerate parabolic equation* // Acta Math. Univ. Comenianae, **LXXII** (2003), 129–139.

[5] M. Winkler, *Some results on degenerate parabolic equations not in divergence form*, Ph. D. Thesis, www.math1.rwth-aachen.de/Forschung-Research/d_emath1.html, 2000.

[6] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.* Итоги науки. Мат. анализ. 1969. Москва: ВИНИТИ, 1971.

[7] J. L. Vazquez, S. I. Shmarev, *On the regulaity of interfaces in solutions of reaction-diffusion equations* // Nonlinear Diff. Equat. Appl., **3** (1996), 465–497.

[8] А. Е. Эльберт, *Об асимптотике решения нелинейного параболического уравнения в окрестности возникновения фронта* // ЖВММФ, **41** (2001), 1041–1052.

[9] V. A. Galaktionov, *Geometric theory of one-dimensional nonlinear parabolic equations I. Singular interfaces* // Adv. Differ. Equat., **7** (2002), 513–580.

[10] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений* // Нелинейные граничные задачи, **3** (1991), 6–12.

[11] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Вырождающиеся параболические уравнения и задачи со свободной границей* // Доклады АН УССР, **1** (1990), 3–7.

[12] M. Ughi, *A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic* // Ann. Mat. Pura Appl., **143** (1986), 385–400.

[13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва, Наука, 1967.

[14] С. Н. Кружков, *Результаты о характере непрерывности решений параболических уравнений и некоторые их применения* // Математические заметки, **6** (1969), 97–108.

[15] А. Фридман, *Вариационные принципы и задачи со свободными границами.* Москва, Наука, 1990.

[16] L. A. Caffarelli, A. Friedman, *Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of a gas in porous medium* // Amer. J. Math., **101** (1979), 1193–1181.

[17] D. G. Aronson, J. L. Vazquez, *Eventual C^∞ regularity and concavity for flows in one-dimensional porous media* // ARMA, **99** (1987), 329–348.

[18] Ko Youngsang, *Regularity of the interface for the porous medium equation* // Electronic Journal of Differential Equations, **68** (2000), 1–12.

[19] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Москва, Физматгиз, 1963.

[20] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, *Регулярность решения задачи со свободной границей для уравнения $v_t = (v^m)_{xx}$* // Алгебра и анализ, **12** (2000), 1–21.

[21] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, *Классическая разрешимость первой начально-краевой задачи для нелинейного сильно вырождающегося параболического уравнения* // Украинский мат. журнал, **56** (2004), N 10, 1299–1321.

REGULARITY OF THE SOLUTION TO THE MANY-DIMENSIONAL FREE BOUNDARY PROBLEM FOR THE POROUS MEDIUM EQUATION

*Sib. Mat. Trudy–1997,–**49**, №10*

Introduction.

The porous media equation

$$\rho_t = \Delta(\rho^m), \;\; m > 1, \tag{0.1}$$

arises in many applications. For example, the filtration of an isothermal gas in a homogeneous media may be described in a suitable scale with the help of the mass conservation law

$$\rho_t + div(\rho \overrightarrow{v}) = 0, \tag{0.2}$$

the state's equation

$$p = \rho^{m-1} \tag{0.3}$$

and the Darcy law

$$\overrightarrow{v} = -\tfrac{m}{m-1} \nabla p, \tag{0.4}$$

where ρ is a density, p is a pressure, $\overrightarrow{v}$ is a velocity vector. So we obtain the equation (0.1) on account of the relations (0.2)-(0.4).

It is well-known fact [1] that the equation (0.1) ensures a finite speed of propagation of disturbances. It means, for example, that in Cauchy problem for the equation (0.1) with a nonnegative finite initial function $\rho(y, 0)$ a region $\Omega(t)$ occupied by a gas is bounded for all $t > 0$. Thus there is an interface (free boundary) $\Gamma(t)$ separating domains $\{y : \rho(y, t) > 0\}$ and $\{y : \rho(y, t) = 0\}$.This interface can be defined also as the boundary of a solution's support. In the Cauchy problem the analyticity of the free boundary was established in [2] for all $t > 0$ in one-dimensional case. For $n \geq 2$ it was shown in [3] that the function $t = t(y), y \in R^n$, describing the free boundary configuration, belongs to the class $C^{1+\alpha}$ under the assumption

$$\tfrac{\partial}{\partial n}(\rho_0^{m-1})|_{\Gamma(0)} \neq 0, \;\; \rho_0 = \rho(y, 0). \tag{0.5}$$

The physical sense of the condition (0.5) is that the free boundary $\Gamma(t)$ starts its moving instantly, so the "waiting time" is excluded. One can be noted that due to the indicated physical interpretation of (0.2)-(0.4) the following equations

$$p|_{\Gamma(t)} = 0, \quad V_n = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}|_{\Gamma(t)} = -\tfrac{m}{m-1}\tfrac{\partial p}{\partial n} \tag{0.6}$$

are fulfilled on $\Gamma(t)$ if the function p and the interface $\Gamma(t)$ are sufficiently smooth. Here $\overrightarrow{n}$ is the unit outward normal to $\Omega(t)$ and V_n is the normal velocity of the interface. Thus Stefan like free boundary problem can be formulated: to find a function p and a free boundary $\Gamma(t)$ such that the "pressure equation"

$$p_t = m\, p\, \Delta p + \tfrac{m}{m-1}\, |\nabla p|^2, \;\; y \in \Omega(t),\; t \in (0,T), \tag{0.7}$$

which follows from (0.1), free boundary conditions (0.6) and some initial conditions are satisfied. On smoothness classes of functions the Cauchy problem for (0.1) and the free boundary problem (0.6), (0.7) are equivalent for correspondent initial data.

The question about the free boundary smoothness depending on a regularity of the initial data up to the moment $t = 0$ was open to the last time. In our work [4] we considered the certain one dimensional free boundary problem for the equation (0.7) under conditions (0.6) and showed that the free boundary smoothness increases if the smoothness of the initial data increases. The similar problem for the Cauchy problem had been studied in [5] for the dimension $n = 2$. The ideas of the study in [4] and [5] are close but the different approaches were used to obtain the necessary a priori estimates in the following model problem

$$\begin{gathered} L_b u = u_t - x_n\, \Delta u - b\, u_{x_n} = f\left(x,t\right), (x,t) \in D_T, \\ u(x,0) = u_0(x),\; x \in D, \end{gathered} \tag{0.8}$$

where $n \geq 1$, $D = \{x:\; x_n > 0\}$, $D_T = D \times (0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$ are given functions and b is a positive parameter .

In this paper we present the estimates of the problem (0.8), which permit to extend the results from [4] to the case of the arbitrary number of spatial variables.

We consider a simple geometry for the free boundary problem, because we are primarily interesting in the investigation of the model problem, which simulates the local behaviour of the function $p(y,t)$ near the unknown interface $\Gamma(t)$ and shows the point of the problem under consideration.

Remark 0.1 *Since the regularity properties of the free boundary $\Gamma(t)$ are determined by local properties of the solution near $\Gamma(t)$, our results are closely related to the description of the free boundary properties for the Cauchy problem. Of course, another methods of the reduction of the Cauchy problem to a problem in a fixed domain must be used.*

Let $y' = (y_1, .., y_{n-1})$ and denote

$$\Sigma = \{y \in R^n : y_n = 0\}\,,\ \Gamma(0) = \{y \in R^n : y_n = \varphi_o(y')\}\,,$$

$$\Gamma(t) = \{y \in R^n : y_n = \varphi(y', t)\}\,,\ \Sigma_T = \Sigma \times (0, T),\ \Gamma_T = \bigcup_{t \in (0,T)} (\Gamma(t) \times \{t\})\,,$$

$$\Omega(t) = \{y \in R^n : 0 < y_n < \varphi(y', t)\}\,,\ \Omega_T = \bigcup_{t \in (0,T)} (\Omega(t) \times \{t\})\,,\ \Omega_o = \Omega(0).$$

We consider the following problem: to seek a function $p(y, t)$ and a free boundary $\Gamma(t)$ such that

$$\begin{gathered} p_t = mp\Delta p + \tfrac{m}{m-1}|\nabla p|^2,\ (y,t) \in \Omega_T; \\ p(y,0) = p_0(y),\ y \in \Omega_0;\ \varphi(y',0) = \varphi_o(y'),\ y' \in R^{n-1}; \\ p(y,t) = p^*,\ \ (y,t) \in \Sigma_T; \\ p = 0,\ \ V_n = -\tfrac{m}{m-1}\tfrac{\partial p}{\partial n},\ \ (y,t) \in \Gamma_T, \end{gathered} \tag{0.9}$$

here p^* is a given positive constant.

We assume that $\varphi_0(y') \geq \delta > 0$ and

$$-\tfrac{\partial p_o}{\partial y_n} \geq \delta > 0,\ y \in \Omega_0. \tag{0.10}$$

This strong condition will "facilitate" the passage from the free boundary problem (0.9) to the certain problem in the fixed domain and ensures, in particular, the condition (0.7).

Similarly to [5] we introduce the function

$$\overline{s}[y, \overline{y}] = \tfrac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{d(y)}+\sqrt{d(\overline{y})}+\sqrt{|y-\overline{y}|}},$$

where $d(y)$ is the distance from y to $\Gamma(0)$. It is easy to observe that the functions $d(y)$ and $p_0(y)$ are equivalent in view of condition (0.10), i.e. we can choose the constants c_1 and c_2 such that

$$c_1 d(y) \leq p_0(y) \leq c_2 d(y),\ y \in \Omega_0. \tag{0.11}$$

We use the space $C_s^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Omega \in R^n$ of functions $p(y)$ with the norm

$$|p|_\Omega^{(\alpha)} = \max_{\overline{\Omega}} |p| + \langle p \rangle_\Omega^{(\alpha)}\,,$$

where

$$\langle p \rangle_\Omega^{(\alpha)} = \sup_{y, \overline{y} \in \Omega} \tfrac{|p(y)-p(\overline{y})|}{\overline{s}^\alpha[y,\overline{y}]}.$$

Denote by $C_s^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ the functional space with the norm

$$|p|_{C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} = |p|_\Omega^{(\alpha)} + \sum_{|l|=1} \left|D^l p\right|_\Omega^{(\alpha)} + \sum_{|l|=2} \left|dD^l p\right|_\Omega^{(\alpha)} .$$

and by $C_s^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ $(C_s^{k,2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right))$ the space of functions $p(y)$ whose $l-$order derivatives $D^l p$ with $|l| \leq k$ belong to the space $C_s^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ $(C_s^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right))$.

The main result of the paper is contained in

Theorem 0.1. *Let $\Gamma(0) \in C^{k+\alpha/2}$ $(\varphi_o \in C^{k+\alpha/2}(R^{n-1}))$, $p_o \in C_s^{k-1,2+\alpha}\left(\overline{\Omega_0}\right)$, $k \geq 1$, the condition (0.10) is satisfied and the consistency conditions of the k-order are fulfilled, then for sufficiently small T there exists a unique smooth solution of the problem (0.9) and $\Gamma_T \in C^{k+\alpha/2}$ $(\varphi \in C^{k+\alpha/2}(R^{n-1} \times [0,T]))$.*

The plan of the paper is following. In section 1 we reduce the problem (0.9) to a problem in fixed domain and give definitions of corresponding functional spaces. In order to treat this fixed domain nonlinear problem we need to study its linearization. On this way the principal analytical difficulties lie in the investigation of the model problem (0.8). It is the subject of the sections 2 and 3, where the estimates of the Green function and the model problem solution are given respectively. In section 4 we prove one-to-one solvability of the linearized problem by construction of a regularizer (see [6, Ch.4]). At last the section 5 is devoted to the existence of a solution of the original nonlinear problem.

1. Reduction of the original problem to a problem in a fixed domain. Functional spaces.

The assumption (0.10) allows us to use the well-known transform

$$\begin{gathered} x_i = y_i,\ i = 1, ..., n-1; \\ x_n = p(y', y_n, t) \end{gathered} \tag{1.1}$$

so that the inverse transform is

$$\begin{gathered} y_i = x_i,\ i = 1, ..., n-1; \\ y_n = u(x', x_n, t). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Here $u(x,t)$ is a new unknown function instead of $p(y,t)$ such that

$$y_n \equiv u(y', p(y,t), t). \tag{1.3}$$

As is easily seen from (1.1)- (1.3) the free boundary $\Gamma(t)$ is transformed into the plane $x_n = 0$ and, conversely, $y_n = u(x', 0, t)$ is a desired representation of $\Gamma(t)$. Introduce the following notations: $\Gamma^* = \{x : \ x_n = 0\}$, $\Sigma^* = \{x : \ x_n = p^*\}$, $\Omega^* = \{x : \ 0 < x_n < p^*\}$, $\Gamma^*_T = \Gamma^* \times (0,T)$, $\Sigma^*_T = \Sigma^* \times (0,T)$, $\Omega^*_T = \Omega^* \times (0,T)$.

In the new variables the problem (0.9) becomes:

$$
\begin{gathered}
Mu \equiv u_t - m\, x_n \left(\tfrac{1+|\nabla' u|^2}{(u_{x_n})^2} u_{x_n\, x_n} - \tfrac{2}{u_{x_n}} \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i} u_{x_n\, x_i} + \Delta' u \right) + \tfrac{m}{m-1} \tfrac{1+|\nabla' u|^2}{u_{x_n}} = 0, \\
(x,t) \in \Omega^*_T; \\
u(x,0) = u_o(x), \quad x \in \Omega^*; \quad u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Sigma^*_T; \\
u_t + \tfrac{m}{m-1} \tfrac{1+|\nabla' u|^2}{u_{x_n}} = 0, \quad (x,t) \in \Gamma^*_T;
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

where $\nabla' u = \left(u_{x_1}, ..., u_{x_{n-1}} \right)$, $\Delta' u = \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_{x_i\, x_i}$ and u_0 is the inverse function to p_0. The latter condition in (1.4) is a consequence of the following relations: $n = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|}$, $V_n = \frac{p_t}{|\nabla p|}$ and subsequent computations of the derivatives of the function u from the derivatives of p.

Now we proceed to definition of the functional spaces.

Let G be an arbitrary subdomain of $D = \{x : \ x_n > 0\}$ (below by G we mean Ω^* or D). Following to [5] we introduce the function

$$
\overline{s}\,[x, \overline{x}] = \frac{|x_n - \overline{x}_n| + |x' - \overline{x}'|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} + \sqrt{|x' - \overline{x}'|}}.
$$

First we denote

$$
\begin{gathered}
|u|^{(\alpha)}_G = \max_{\overline{G}} |u| + \langle u \rangle^{(\alpha)}_G, \\
|u|^{(\alpha)}_{G_T} = \max_{\overline{G_T}} |u| + \langle\langle u \rangle\rangle^{(\alpha)}_{G_T}, \\
\langle\langle u \rangle\rangle^{(\alpha)}_{G_T} = \langle u \rangle^{(\alpha)}_{x, G_T} + \langle u \rangle^{(\alpha/2)}_{t, G_T},
\end{gathered}
$$

here

$$
\langle u \rangle^{(\alpha)}_G = \sup_{x, \overline{x} \in G} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{\overline{s}^\alpha [x, \overline{x}]},
$$

$$
\langle u \rangle^{(\alpha)}_{x, G_T} = \sup_{(x,t), (\overline{x}, t) \in G_T} \frac{|u(x,t) - u(\overline{x}, t)|}{\overline{s}^\alpha [x, \overline{x}]},
$$

$$
\langle u \rangle^{(\alpha)}_{t, G_T} = \sup_{(x,t), (x, \overline{t}) \in G_T} \frac{|u(x,t) - u(x, \overline{t})|}{|t - \overline{t}|^{\alpha/2}}.
$$

We denote by $C^\alpha_s(\overline{G})$, $C^\alpha_s(\overline{G}_T)$ the spaces with the norms $|u|^{(\alpha)}_G$ and $|u|^{(\alpha)}_{G_T}$ respectively.

Next we denote $C_s^{2+\alpha}(\overline{G})$ the functional spaces with the norm

$$|u|_G^{(2+\alpha)} = |u|_G^{(\alpha)} + \sum_{|l|=1} \sup_G |D^l u| + \sum_{|l|=2} \sup_G |x_n\, D^l u| + \langle u\rangle_G^{(2+\alpha)}\,,$$

where

$$\langle u\rangle_G^{(2+\alpha)} = \sum_{|l|=1} \left\langle D^l u\right\rangle_G^{(\alpha)} + \sum_{|l|=2} \left\langle x_n\, D^l u\right\rangle_G^{(\alpha)}.$$

Throughout below by D^l we imply the derivatives with respect to x of the l order. We denote by $C_s^{2+\alpha}(\overline{G}_T)$ the functional space with the following norm

$$|u|_{G_T}^{(2+\alpha)} = |u|_{G_T}^{(\alpha)} + \sum_{|l|=1} \sup_{G_T} |D^l u| + \sum_{|l|=2} \sup_{G_T} |x_n\, D^l u| + \sup_{G_T} |u_t| + \langle\langle u\rangle\rangle_G^{(2+\alpha)}\,,$$

where

$$\langle\langle u\rangle\rangle_G^{(2+\alpha)} = \sum_{|l|=1} \left(\langle\langle D^l u\rangle\rangle_{G_T}^{(\alpha)} + \left\langle x_n\, D^l u\right\rangle_{t,G_T}^{(\frac{\alpha+1}{2})}\right) + \sum_{|l|=2} \langle\langle x_n\, D^l u\rangle\rangle_{G_T}^{(\alpha)} + \langle\langle u_t\rangle\rangle_{G_T}^{(\alpha)}.$$

By $C_s^{k,\alpha}(\overline{G}_T)$ $\left(C_s^{k,2+\alpha}\left(\overline{G}_T\right)\right)$ we denote the spaces of functions u whose l-order derivatives $D^l u$ with $|l| \le k$ belong to the space $C_s^{\alpha}(\overline{G}_T)$ $\left(C_s^{2+\alpha}\left(\overline{G}_T\right)\right)$. In a similar way we introduce $C_s^{k,\alpha}(\overline{G})$, $C_s^{k,2+\alpha}(\overline{G})$. By $C_{s,0}^{k,\alpha}(\overline{G}_T)$ we mean the subspace of $C_s^{k,\alpha}(\overline{G}_T)$ with elements $u(x,t)$ such that $D_t^m u(x,0) = 0$ for all $m \le k$. We define also $C_{s,0}^{k,2+\alpha}\left(\overline{G}_T\right) = \left\{u \in C_s^{k,2+\alpha}\left(\overline{G}_T\right) : D_t^m u(x,0) = 0 \text{ for all } m \le k+1\right\}$.

We need also some propositions concerning with properties of functions from $C_s^{\alpha}(\overline{G}_T)$, $C_s^{2+\alpha}\left(\overline{G}_T\right)$.

Proposition 1.1. *Let $u \in C_s^{2+\alpha}\left(\overline{G}_T\right)$ or $u \in C_s^{2+\alpha}\left(\overline{G}\right)$, then*

$$x_n\, D^l u|_{x=0} = 0, \text{ for all } |l| = 2.$$

(cf. [5, Proposition I.12.1, p.940]).

Proposition 1.2.

A) Let $u \in C\left(\overline{G}_T\right)$,

$$|u(x,t)| \le c x_n^{\alpha/2},\ (x,t) \in \overline{G}_T, \tag{1.5}$$

$$|u(x,t) - u(\overline{x},t)| \le c\left(\frac{|x_n - \overline{x}_n| + |x' - \overline{x}'|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n}}\right)^{\alpha},\ (x,t),(\overline{x},t) \in \overline{G}_T, \tag{1.6}$$

with c independent of $x, \overline{x}, t$, then there exists a constant c such that

$$|u(x,t) - u(\overline{x},t)| \le c\overline{s}^{\alpha}\left[x, \overline{x}\right],\ (x,t),(\overline{x},t) \in \overline{G}_T. \tag{1.7}$$

B) Let $u \in C\left(\overline{G}_T\right)$,

$$|u(x', x_n, t) - u(\overline{x}', x_n, t)| \leq c|x' - \overline{x}'|^{\alpha/2},\ (x', x_n, t), (\overline{x}', x_n, t) \in \overline{G}_T,$$

$$|u(x,t) - u(\overline{x},t)| \leq c\left(\frac{|x_n - \overline{x}_n| + |x' - \overline{x}'|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n}}\right)^{\alpha},\ (x,t), (\overline{x},t) \in \overline{G}_T,$$

then there exists a constant c such that

$$|u(x,t) - u(\overline{x},t)| \leq c\overline{s}^{\alpha}\left[x, \overline{x}\right];\ (x,t), (\overline{x},t) \in \overline{G}_T.$$

Proof. We have a) $\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} \geq |x' - \overline{x}'|^{1/2}$ or b) $\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} \leq |x' - \overline{x}'|^{1/2}$. If a) then we have $\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} + |x' - \overline{x}'|^{1/2} \leq 2\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n}\right)$ and in view of (1.6)

$$|u(x,t) - u(\overline{x},t)| \leq c\left(\frac{2(|x_n - \overline{x}_n| + |x' - \overline{x}'|)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} + |x' - \overline{x}'|^{1/2}}\right)^{\alpha} \leq c_1\overline{s}^{\alpha}\left[x, \overline{x}\right].$$

In the case b) we obtain $\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} + |x' - \overline{x}'|^{1/2} \leq 2|x' - \overline{x}'|^{1/2}$, so that

$$|\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n}|^{\alpha} \leq |x' - \overline{x}'|^{\frac{\alpha}{2}} \leq \left(\frac{2|x' - \overline{x}'|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n} + \sqrt{|x' - \overline{x}'|}}\right)^{\alpha} \leq 2^{\alpha}\overline{s}^{\alpha}\left[x, \overline{x}\right]$$

In view of (1.5) we deduce

$$|u(x,t) - u(\overline{x},t)| \leq c\left(x_n^{\alpha/2} + \overline{x}_n^{\alpha/2}\right) \leq c\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{\overline{x}_n}\right)^{\alpha} \leq c_2\overline{s}^{\alpha}\left[x, \overline{x}\right].$$

We put $c = \max\{c_1, c_2\}$ and obtain (1.7). This completes the proof of A). In a similar way we can proof B).$\square$

Except of the weight Hölder spaces we need also to use the standard Hölder spaces $H^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{\Sigma_T^*}\right)$, $H^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega_T^*}\right)$ (see [6]).

2.The Green function.

We begin this section by carrying out formal calculations to obtain the Green function representation for the model problem (0.8). Further, we will derive the estimates of the Green function $G(x, \xi, y, t)$ in order to prove that the expression

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} d\xi \int_{R^{n-1}} G(x_n, \xi, x' - \eta, t - \tau) f(\xi, \tau) d\eta$$
$$+ \int_0^{\infty} d\xi \int_{R^{n-1}} G(x_n, \xi, x' - \eta, t) u_0(\xi, \eta) d\eta$$

is in fact the solution of (0.8).

2.1. The construction of the Green function. Throughout below we denote $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$. We note that one can rewrite the differential part of (0.8) as follows

$$L_b u = x_n^{1-b}\left(\left(x_n^{b-1}u\right)_t - \left(x_n^b u_x\right)_x - \Delta'\left(x_n^b u\right)\right).$$

We use the Fourier transform

$$\widetilde{w}(\sigma,\lambda,t) = F[w] = \int\limits_0^\infty dx_n \int\limits_{R^{n-1}} \exp(-ix_n\sigma - ix'\lambda) w(x,t)dx'.$$

Let the right-hand side in (0.8) be equal to zero. We note that

$$\left(F\left[x_n^{b-1}u\right]\right)'_\sigma = -iF\left[x_n^b u\right],$$

$$F\left[(x_n^b u_{x_n})_{x_n}\right] = i\sigma b F\left[x_n^{b-1}u\right] - \sigma^2 F\left[x_n^b u\right],$$

for an arbitrary smooth function u with a compact support.

We denote $w(x,t) = x_n^{b-1}u(x,t)$ and obtain the Cauchy problem for $\widetilde{w}$:

$$\widetilde{w}_t + i\sigma b\widetilde{w} + i(\sigma^2 + |\lambda|^2)\widetilde{w}_\sigma = 0,\ t > 0,\ (\sigma,\lambda) \in R^n;$$

$$\widetilde{w}(\sigma,\lambda,0) = \widetilde{w}_0(\sigma,\lambda),\ (\sigma,\lambda) \in R^n,$$

where $\widetilde{w}_0 = F\left[x_n^{b-1}u_0\right]$. The solution of this problem (see [7]) has the explicit form

$$\widetilde{w}(\sigma,\lambda,t) = \{ch\, at + \frac{i\sigma}{a} sh\, at\}^{-b}\widetilde{w}_0(\zeta,\lambda),$$

where

$$a = |\lambda|,\ \zeta = \frac{a\sigma\, ch\, at - ia^2\, sh\, at}{a\, ch\, at + i\sigma\, sh\, at}.$$

Next we have, by applying the inverse Fourier transform,

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \tfrac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int\limits_{R^{n-1}} \exp(ix_n\sigma + ix'\lambda)\widetilde{w}(\sigma,\lambda,t)d\lambda \\ &= \tfrac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int\limits_{R^{n-1}} d\lambda \exp(ix_n\sigma + ix'\lambda)\{ch\, at + \tfrac{i\sigma}{a} sh\, at\}^{-b} \\ &\quad\times \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{R^{n-1}} \exp(-i\xi\zeta - i\eta\lambda)\xi^{b-1}u_0(\xi,\eta)d\eta. \end{aligned}$$

The interchange of the order of integration and the change of w by $x_n^{b-1}u$ lead to the expression

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{R^{n-1}} G(x_n,\xi,x'-\eta,t)u_0(\xi,\eta)d\eta,$$

here

$$G(x_n,\xi,x',t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^{n-1}}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(ix'\lambda+ix\sigma-i\xi\zeta)\{ch\,at+\frac{i\sigma}{a}sh\,at\}^{-b}$$

$$\times\left(\frac{\xi}{x\,n}\right)^{b-1}d\sigma.$$

The routine calculations show that

$$i\xi\zeta=\xi a\,coth\,at-\xi\tfrac{a^2}{sh^2\,at[i\sigma+a\,coth\,at]},$$

$$ch\,at+\tfrac{i\sigma}{a}sh\,at=\tfrac{sh\,at[i\sigma+a\,coth\,at]}{a},$$

consequently (cf. [8, formula 5.5.35])

$$G(x_n,\xi,x',t)=\tfrac{1}{(2\pi)^n}\left(\tfrac{\xi}{x\,n}\right)^{b-1}\int\limits_{R^{n-1}}d\lambda\exp(ix'\lambda-(x_n+\xi)a\,coth\,at)$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[x_n(i\sigma+a\,coth\,at)+\xi\tfrac{a^2}{[i\sigma+a\,coth\,at]sh^2\,at}\right][i\sigma+a\,coth\,at]^{-b}\left(\tfrac{a}{shat}\right)^b d\sigma$$
$$=\tfrac{1}{(2\pi)^{n-1}}\left(\tfrac{x}{\xi}\right)^{\frac{1-b}{2}}\int\limits_{R^{n-1}}\exp(ix'\lambda-(x_n+\xi)a\,coth\,at)I_{b-1}\left(\tfrac{2(x_n\xi)^{1/2}a}{sh\ at}\right)\tfrac{a}{shat}d\lambda,$$

where $I_\nu(x)$ is the modified Bessel function.

Let

$$f(a)=\exp(-(x_n+\xi)a\,coth\,at)I_{b-1}\left(\frac{2(x_n\xi)^{1/2}a}{sh\ at}\right)\frac{a}{shat}.$$

Since $a=|\lambda|$, we can apply the formula (see [9, p.152]):

$$\int\limits_{R^{n-1}}\exp(ix'\lambda)f(|\lambda|)d\lambda=2\pi^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{1-\frac{n-1}{2}}\int\limits_0^\infty a^{\frac{n-1}{2}}J_{\frac{n-1}{2}-1}(a\rho)f(a)\,da,$$

here $\rho=|x'|$, J_ν is the first kind Bessel function, and obtain

$$G(x_n,\xi,x',t)=\tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\tfrac{x_n}{\xi}\right)^{\frac{1-b}{2}}\int\limits_0^\infty\exp(-(x_n+\xi)a\,coth\,at)$$

$$\times I_{b-1}\left(\tfrac{2(x_n\xi)^{1/2}a}{shat}\right)\tfrac{a}{shat}a^{\frac{n-1}{2}}|x'|^{-\frac{n-3}{2}}J_{\frac{n-3}{2}}(a|x'|)da.$$

We denote by $q=1-b,\ u=\left(\frac{\xi}{t}\right)^{\frac12},\ v=\left(\frac{x_n}{t}\right)^{\frac12}, m^2=u^2+v^2, z=2uv, w=\frac{|y'|}{t}$.

The change of the variable $\mu = at$ implies

$$G(x_n, \xi, x', t)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{u^{-2q} z^q}{2^q t^n} \int\limits_0^{\infty} \exp(-m^2 \mu \, coth\, \mu) I_{-q} \left(z \frac{\mu}{sh\mu} \right) \frac{\mu}{sh\mu} \mu^{\frac{n-1}{2}} w^{-\frac{n-3}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(\mu \, w) d\mu. \tag{2.1}$$

Further for the sake of simplicity we consider the case $n = 2$ and give some additional remarks relating to the case $n > 2$. Hereafter in the sections 2 and 3 we put $n = 2$, $x_2 = x$, $x_1 = y$. Since $J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$ we obtain

$$G(x, \xi, y, t) = \frac{u^{-2q} z^q}{\pi 2^q \, t^2} \int\limits_0^{\infty} \exp(-m^2 \mu \, coth\, \mu) I_{-q} \left(z \frac{\mu}{sh\mu} \right) \frac{\mu}{sh\mu} \cos(\mu w) d\mu. \qquad (2.2).$$

2.2. Preliminaries. We deduce some auxiliary assertions before setting to the Green function estimates.

First we have

$$\begin{gathered} \tfrac{\mu}{sh\mu} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu^{2k} + o(\mu^{2n}), \; \alpha_1 = -\tfrac{1}{6}, \\ \mu \, coth\, \mu = 1 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu^{2k} + o(\mu^{2n}), \; \beta_1 = \tfrac{2}{3}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

with some constants α_k, β_k and arbitrary $n \geq 1$. It is worth to observe that $\alpha_1 \neq \beta_1$.

Using the representation

$$\tfrac{\mu}{sh\mu} = \tfrac{2\mu \exp(-\mu)}{1 - \exp(-2\mu)} = 2\mu \exp(-\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\mu k), \;\; \mu > 0,$$

it's easy to prove that

$$\left| \left(\tfrac{\mu}{sh\mu} \right)^{(l)} (\mu) \right| \leq c_l \tfrac{\mu}{sh\mu}, \;\; \mu \in [0, +\infty), l \geq 1. \tag{2.4}$$

Similarly the representation

$$\mu \, coth\, \mu = \mu \frac{1 + \exp(-2\mu)}{1 - \exp(-2\mu)} = \mu(1 + \exp(-2\mu)) \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2\mu k)\}, \;\; \mu > 0,$$

implies the estimate

$$\left| \mu \, coth\, \mu^{(l)}(\mu) \right| \leq c_l, \;\; \mu \in [0, +\infty), l \geq 1. \tag{2.5}$$

We observe that
$$\mu \, coth \, \mu \geq 1 \geq \tfrac{\mu}{sh\mu}, \;\; \mu \in [0, +\infty). \tag{2.6}$$

We use also some well-known properties of the modified Bessel functions. Let us remind that the function I_{-q} can be determined with the help of the series

$$I_{-q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!\Gamma(-q+k+1)} (\tfrac{x}{2})^{-q+2k} \tag{2.7}$$

and possesses by the following asymptotic expansion as x tends to infinity

$$I_{-q}(x) = \tfrac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}} (1 - \tfrac{1}{2x} \tfrac{\Gamma(-q+\frac{3}{2})}{\Gamma(-q-\frac{1}{2})} + o(\tfrac{1}{x})). \tag{2.8}$$

From (2.7), (2.8) the next estimate follows

$$I_{-q}(x) \leq \left\{ \begin{array}{c} cx^{-q}, \; 0 < x \leq 1, \\ c\frac{\exp x}{\sqrt{x}}, \;\; x > 1. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Let us consider the function $\Phi(x) = \exp(-x)x^q I_{-q}(x)$. We claim that

$$\left| \Phi^{(l)}(x) x^l \right| \leq \left\{ \begin{array}{c} c, \; 0 \leq x \leq 1, \\ cx^{q-\frac{1}{2}}, \;\; x > 1. \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Indeed, the derivatives of the arbitrary order of $I_{-q}(x)$, being depended on the other modified Bessel functions with different indices, possess by the asymptotic expansions, that can be represented with the help of (2.8). Besides these derivatives are smooth functions on an interval $[\delta, +\infty)$ for any positive δ. Thus the asymptotic expansions for the derivatives of $\Phi(x)$ can be obtained by differentiating of the asymptotic expansion of $\Phi(x)$ due to Theorem 4.17 [10, v.1, p.80] . Hence the estimate (2.10) with $x > 1$ holds. The estimate for $0 < x \leq 1$ follows from (2.7).

Next we will use the inequalities

$$\int\limits_{1/2v}^{\infty} u^{\alpha} \exp(-\gamma(u-v)^2) du \leq c \left\{ \begin{array}{c} v^{\alpha}, \; v \geq 1 \\ \exp(-\frac{\gamma}{16v^2}), \; v \leq 1 \end{array} \right\} \leq cv^{\alpha}, \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{0}^{1/2v} u^{\alpha} \exp(-\gamma(u-v)^2) du \leq c \left\{ \begin{array}{c} \exp(-\gamma v^2), \; v \geq 1 \\ 1, \qquad v \leq 1 \end{array} \right\} \leq c \exp(-\gamma v^2), \tag{2.12}$$

that are valid for $\alpha > -1$ (see [4]), γ is an arbitrary positive constant.

Below if $f(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} f_1(u,v), z \leq 1 \\ f_2(u,v), z > 1 \end{array} \right.$, we will write $f(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \end{array} \right\}$, here $z = 2uv$.

The inequality

$$
\int\limits_0^{1/2v} u^{1-2q}\exp(-\gamma(u-v)^2)du + \int\limits_{1/2v}^{\infty} u^{1-2q} z^{q-1/2}\exp(-\gamma(u-v)^2)du =
$$
$$
= \int\limits_0^{\infty} u^{1-2q}\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{q-1/2} \end{array} \right\}\exp(-\gamma(u-v)^2)du \le C \tag{2.13}
$$

is a direct consequence of (2.11), (2.12).

2.3. The Green function estimates We define the function

$$
g(u,v,t,\gamma) = \tfrac{u^{-2q}}{t^2}\exp(-\gamma(u-v)^2))\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{q-1/2} \end{array} \right\}, \tag{2.14}
$$

where $\gamma \in (0,1]$. Below we denote by $g(u,v,t)$ all functions of the such type, which may have a distinction one from other by some constant multiplier or by a parameter γ.

Lemma 2.1. *The following estimates are valid:*

$$
|G(x,\xi,y,t)| \le \tfrac{C}{w^n} g(u,v,t,\gamma)\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{\frac{n-1}{2}} \end{array} \right\}, \; w = \tfrac{|y|}{t}, \; z = 2uv, \tag{2.15}
$$

with an arbitrary nonnegative integer n and C, γ depended on n only.

Proof. We represent the Green function (2.2) in the following form:

$$
G = \frac{u^{-2q}}{2^q \pi\, t^2}\int\limits_0^{\infty} H(\mu)\cos(\mu w)d\mu \tag{2.16}
$$

with

$$
H(\mu) = \exp(-(u-v)^2 \mu \, coth\, \mu)\exp(-z(\mu\, coth\,\mu - \tfrac{\mu}{sh\mu}))\exp(-z\tfrac{\mu}{sh\mu})
$$
$$
\times \left(z\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)^q I_{-q}\left(z\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)\left(\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)^b.
$$

We start with the case $n = 0$.

Let us denote $\varphi(z,\mu) = \exp(-z\frac{\mu}{sh\mu})\left(z\frac{\mu}{sh\mu}\right)^q I_{-q}\left(z\frac{\mu}{sh\mu}\right)\left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^b$. In accordance with (2.10) the inequalities

$$
|\varphi(z,\mu)| \le c\left(\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)^b \left\{ \begin{array}{c} 1, \; 0 < z\tfrac{\mu}{sh\mu} \le 1, \\ \left(z\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)^{q-1/2}, \; z\tfrac{\mu}{sh\mu} > 1, \end{array} \right.
$$

or $(q = 1 - b)$

$$|\varphi(z,\mu)| \leq c \begin{cases} \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^b, & 0 < z\frac{\mu}{sh\mu} \leq 1, \\ z^{q-1/2}\left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^{1/2}, & z\frac{\mu}{sh\mu} > 1, \end{cases} \tag{2.17}$$

are valid.

Next we distinguish the cases $a)$ $z > 1$ and $b)$ $z \leq 1$.

In the case $a)$ we have from (2.6), (2.17)

$$|G| \leq c\frac{u^{-2q}}{t^2}\exp(-(u-v)^2)\{\int\limits_{\{\mu: z\frac{\mu}{sh\mu}\leq 1\}} \exp(-z(\mu\, coth\, \mu - \tfrac{\mu}{sh\mu}))(\tfrac{\mu}{sh\mu})^b d\mu$$

$$+ \int\limits_{\{\mu: z\frac{\mu}{sh\mu}>1\}} \exp(-z(\mu\, coth\, \mu - \tfrac{\mu}{sh\mu}))\, z^{q-1/2}(\tfrac{\mu}{sh\mu})^{1/2}d\mu\} = c\frac{u^{-2q}}{t^2}\exp(-(u-v)^2)\{i_1 + i_2\}.$$

The main point is the estimate of the second integral. We change the variable $\sigma = z^{1/2}(\mu\ coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})^{1/2}$ in this integral and obtain $\frac{d\sigma}{d\mu} = \frac{z^{1/2}(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})'}{2(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})^{1/2}}$ and denote $h(\mu) = \frac{(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})^{1/2}}{(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})'}(\frac{\mu}{sh\mu})^{1/2}$. As a consequence of (2.3)-(2.5) we obtain the uniform estimate

$$|h(\mu)) \leq M,\ \mu \in [0, +\infty).$$

Hence

$$|i_2| \leq 2Mz^{q-1}\int\limits_0^\infty \exp(-\sigma^2)d\sigma \leq cz^{q-1}.$$

The inequality $x^b\exp(-x) \leq C_b$ ($x \in (0, +\infty),\ b > 0$) gives the estimate $(q = 1 - b)$

$$|i_1| \leq c\int\limits_{\{\mu: z\frac{\mu}{sh\mu}\leq 1\}} \exp(-z\mu\, coth\, \mu)\left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^b d\mu \leq cz^{q-1}\int\limits_0^\infty \frac{d\mu}{ch^b\mu} \leq cz^{q-1}.$$

Since in case $b)$ we have $z\frac{\mu}{sh\mu} \leq 1$ for all $\mu \in [0, +\infty)$ (see (2.6)), we obtain due to (2.17) that

$$|G| \leq c\frac{u^{-2q}}{t^2}\exp(-(u-v)^2)\int\limits_0^\infty \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^b d\mu \leq c\frac{u^{-2q}}{t^2}\exp(-(u-v)^2).$$

Thus the estimate (2.15) with $n = 0$ is established.

Further we will integrate by parts in (2.16) in order to obtain the estimates of decreasing of G with respect to y.

It's obvious that $H(\mu)$ is the even function of μ, so $H^{(n)}(0) = 0$ for all odd integer n. Since $\cos^{(n)}(\mu) = \cos(\mu + \frac{\pi n}{2})$ we deduce

$$G = \frac{1}{2^q \pi} \frac{u^{-2q}}{t^2 w^n} \int\limits_0^\infty H^{(n)}(\mu) \cos(\mu w + \tfrac{\pi n}{2})\, d\mu. \tag{2.18}$$

Remark 2.1. *In the manydimensional case ($n > 2$ in (2.1)) we use the formula*

$$(\frac{d}{z\, dz})^m (z^{-\nu} J_\nu(z)) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z),$$

(see [10, 8.472.4]) *in the integration by parts. Therefore the estimate like (2.15) for the manydimensional case can be obtained by methods, described below for the two-dimensional case, with involving the estimates of the form*

$$J_\nu(z) \le \left\{ \begin{array}{c} cz^\nu,\ z \le 1; \\ cz^{-1/2},\ \ z > 1 \end{array} \right\},\ \nu \ge 0.$$

We see that

$$\begin{aligned} |H^{(n)}(\mu)| \le c_n \sum_{i+j+k+l=n} & |D^i_\mu \exp(-(u-v)^2 \mu \coth \mu)||D^j_\mu (\tfrac{\mu}{sh\mu})^b| \\ \times & |D^k_\mu \Phi\left(z\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)||D^l_\mu \exp(-z(\mu \coth \mu - \tfrac{\mu}{sh\mu}))|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Let us explain the contribution of the each term in (2.19) into the estimate (2.15). By means of the first one we obtain $\exp(-(u-v)^2)$, the second term ensures the convergence of the integral (2.18), with the help of the third and fourth terms we obtain factors $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{q-1/2} \end{array} \right\}$ and $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{\frac{n-1}{2}} \end{array} \right\}$ respectively.

Our starting point is the formula for the derivative of a composite function (see [11, p.33]):

$$\frac{d^l}{d\mu^l} F(r(\mu)) = \sum c_{[i]} \frac{d^m F(r)}{dr^m} (r')^{i_1} (r'')^{i_2} \ldots \left(r^{(l)}\right)^{i_l}, \tag{2.20}$$

here $c_{[i]}$ are some suitable chosen constants and nonnegative integers $i_1, ..i_l, m$ satisfy the conditions:

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + l i_l = l, \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_l = m. \tag{2.21}$$

.

By using (2.20), (2.21), (2.5), (2.6), we have

$$|D_\mu^i \exp(-(u-v)^2 \mu \, coth \, \mu)|$$

$$\le c \max_{m \le i} (u-v)^{2m} \exp(-(u-v)^2 \mu \, coth \, \mu)) \le c(i) \exp(-\gamma (u-v)^2), \tag{2.22}$$

with γ depended on i.

Due to (2.20), (2.21), (2.4) we obtain

$$\left| D_\mu^j \left(\frac{\mu}{sh\mu} \right)^b \right| \le c(j) \left(\frac{\mu}{sh\mu} \right)^b . \tag{2.23}$$

Applying (2.20), (2.21), (2.10), we deduce similarly to (2.17) that

$$\left| D_\mu^k \Phi \left(z \frac{\mu}{sh\mu} \right) \right| \left(\frac{\mu}{sh\mu} \right)^b \le c(k) \begin{cases} \left(\frac{\mu}{sh\mu} \right)^b, & 0 < z \frac{\mu}{sh\mu} \le 1, \\ z^{q-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{sh\mu} \right)^{1/2}, & z \frac{\mu}{sh\mu} > 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

Denote by $f(\mu) = \mu \, coth \, \mu - \frac{\mu}{sh\mu}$. Differentiating $\exp(-zf(\mu))$, we obtain

$$|D_\mu^l \exp(-zf(\mu))| \le c \exp(-zf(\mu)) \sum z^m (f')^{i_1} (f'')^{i_2} ... (f^{(l)})^{i_l}, \tag{2.25}$$

with

$$i_1 + 2i_2 + ... + li_l = l, \;\; i_1 + i_2 + ... + i_l = m.$$

It should be noted that

$$2m - i_1 = \;\imath_1 + 2i_2 + ... + 2i_l \le l \le n. \tag{2.26}$$

Thus we have by (2.4) and (2.5)

$$|D_\mu^l \exp(-zf(\mu))| \le c \exp(-zf(\mu)) \max_{\{(m,i_1): m \ge 0, i_1 \ge 0, 2m - i_1 \le n\}} z^m (f')^{i_1},$$

with c independent of z and μ.

Now we have to distinguish the cases $a)$ $z \le 1$ and $b)$ $z > 1$ again. Since the proof is quite similar to one given above for $n = 0$, we restrict ourselves by the estimate of the integral

$$I = \int_{\{\mu: \; z \frac{\mu}{sh\mu} > 1\}} |H^{(n)}(\mu)| d\mu.$$

Combining (2.22)-(2.26) and (2.4),(2.5), we can verify that the estimate of this integral is reduced to the estimate of the finite number terms

I_{m,i_1}

$$= \exp(-\gamma(u-v)^2)\, z^{q-\frac{1}{2}} \int_0^\infty z^m \left[\left(\mu\, coth\mu - \frac{\mu}{sh\mu}\right)'\right]^{i_1} \exp(-z(\mu\, coth\mu - \frac{\mu}{sh\mu}) \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^{\frac{1}{2}} d\mu,$$

with $2m - i_1 \leq n$. The change of the variable $\sigma = (zf(\mu))^{1/2} = z^{1/2}(\mu\, coth\mu - \frac{\mu}{sh\mu})^{1/2}$ leads to the inequality

$$\begin{aligned} I_{m,i_1} &= \exp(-\gamma(u-v)^2)\, z^{q-\frac{1}{2}} \int_0^\infty z^{m-\frac{i_1}{2}} \left[z^{\frac{1}{2}} \left(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{i_1} \\ &\times \frac{\left[\left(\mu\, coth\mu - \frac{\mu}{sh\mu}\right)'\right]^{i_1}}{\left(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu}\right)^{i_1/2}} \exp(-z(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})) \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^{1/2} d\mu \\ &\leq c \exp(-\gamma(u-v)^2)\, z^{q-\frac{1}{2}+\frac{2m-i_1-1}{2}} \int_0^\infty \sigma^{i_1} \exp(-\sigma^2)\, d\sigma \\ &\leq c \exp(-\gamma(u-v)^2)\, z^{q-\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

here we made use of the assumptions $z > 1$ and $2m - i_1 \leq n$.

We return to the inequalities (2.18), (2.19) and deduce the estimate (2.15) with arbitrary $n \neq 0$. $\square$

It should be observed here an analogy between the estimates of the integral I_{m,i_1} and the integral

$$\int_0^\infty z^m \mu^{i_1} \exp(-z\mu^2) d\mu, \tag{2.28}$$

where μ^{i_1} and the expression $exp(-z\mu^2)$ simulate the behaviour of $\left[\left(\mu\, coth\mu - \frac{\mu}{sh\mu}\right)'\right]^{i_1}$ and $exp(-z\mu\, cth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu}))$ near $\mu = 0$ respectively (see(2.3)). The change of the variable $\sigma = z^{1/2}\mu$ in (2.28) leads to the integral

$$\int_0^\infty z^m \mu^{i_1} \exp(-z\mu^2) d\mu = z^{\frac{2m-i_1-1}{2}} \int_0^\infty \sigma^{i_1} \exp(-\sigma^2) d\sigma.$$

If we suppose in addition that $z > 1$ and $2m - i_1 \leq n$ (as in (2.27)), then

$$\int_0^\infty z^m \mu^{i_1} \exp(-z\mu^2) d\mu \leq z^{\frac{n-1}{2}}.$$

Next we deduce from (2.15) the estimates which are more convenient to get the integral estimates of $G(x,\xi,y,t)$.

Lemma 2.2. *The Green function satisfies the estimate*

$$|G(x,\xi,y,t)| \le Cg(u,v,t,\gamma)\ Y_k(w,z) \tag{2.29}$$

with

$$Y_k(w,z) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{1+w^k} \\ \\ \frac{z^{(k-1)/2}}{z^{k/2}+w^k} \end{array} \right\}$$

where k is an arbitrary integer, γ depends on k.

Proof. We consider the function

$$\varphi(w) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & |w| < 1, \\ |w|^{-n}, & |w| \ge 1. \end{array} \right.$$

It is obvious that

$$\varphi(w) \le \tfrac{2}{1+|w|^n}.$$

Similarly for the function

$$\psi(w) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{z^{1/2}}\ , & 0 \le w^2 \le z, \\ \\ \frac{z^{(k-1)/2}}{|w|^k}, & w^2 \ge z, \end{array} \right.$$

with the fixed nonzero parameter z we have

$$\psi(w) \le \frac{2\, z^{(k-1)/2}}{z^{k/2}+|w|^k}.$$

Further we consider the estimate (2.15) first for $n=0$ and $|w| \le 1$, then for $n=k$ and $|w| \ge 1$ in both cases with $z \le 1$. Similarly we take $n=0$ and $w^2 \le z$ and then $n=k$, $w^2 \ge z$ when $z > 1$. Applying the above estimate of φ, ψ we obtain (2.29). $\square$

Note that

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{z^{(k-1)/2}}{z^{k/2}+w^k}\, dw = \int\limits_{0}^{\infty} \tfrac{d\sigma}{1+\sigma^k} < \infty,\ \ z \ne 0,\ \ k > 1. \tag{2.30}$$

2.4. Estimates of the Green's function derivatives. In the sequel we will use estimates like (2.29) only in the cases $k = 2,3$, so we will use primarily the functions $Y_2(w,z), Y_3(w,z)$.

Lemma 2.3. *The next estimates*

$$|D_t^k\, G| \le \tfrac{c}{t^k} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \tag{2.31}$$

are valid.

Proof. We use the following notations

$$z = 2\frac{(x\xi)^{1/2}}{t},\ r = z\frac{\mu}{sh\mu},\ \Phi(r) = \exp(-r)r^q I_{-q}(r),\ \ \varphi(z,\mu) = \exp(-r)r^q I_{-q}(r)\frac{\mu}{sh\mu}.$$

We obtain

$$\varphi'_t = -\frac{1}{t}\frac{\mu}{sh\mu}\Phi'_r r,$$

$$\varphi''_t = \frac{1}{t^2}\frac{\mu}{sh\mu}[2\Phi'_r r + \Phi''_r r^2], ..,$$

$$\varphi_t^{(n)} = \sum c_{[i,m]}\ \frac{d^m\Phi}{dr^m}\frac{r^m}{t^n}\frac{\mu}{sh\mu},$$

with some $c_{[i,m]}$ (see (2.20), (2.21)).

Further we confine our attention on the first order derivative G_t. We obtain from (2.16):

$$G_t = \tfrac{u^{-q}}{2^q\pi t^3}\{-2\int\limits_0^\infty H(\mu)\cos\mu w\ d\mu + \int\limits_0^\infty (u-v)^2\mu\, coth\,\mu\, H(\mu)\cos\mu w\ d\mu$$
$$+\int\limits_0^\infty z(\mu\, coth\,\mu - \tfrac{\mu}{sh\mu})H(\mu)\cos\mu w\ d\mu - \int\limits_0^\infty \exp(-(u-v)^2\mu\, coth\,\mu - z(\mu\, coth\,\mu - \tfrac{\mu}{sh\mu}))$$
$$\times\Phi'_r r\left(\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)^b\cos\mu w\ d\mu - \int\limits_0^\infty H(\mu)\mu w\sin\mu w\ d\mu\} = i_1 + ... + i_5.$$

The estimates of i_1, i_2, i_3, i_4 are derived by the following to the same scheme as in Lemma 2.2. Remind that $\Phi_r^{(m)}(r)\, r^m$ is estimated from (2.10). The multiplier $z(\mu\, coth\,\mu - \frac{\mu}{sh\mu})$ in the third term doesn't make the essential alterations, because after the change of the variable $\sigma = z^{1/2}(\mu\, coth\,\mu - \frac{\mu}{sh\mu})^{1/2}$ it transforms to σ^2.

The integral i_5 should be integrated by parts one more time, since we have a linear growth with respect to w in the integrand:

$$\int\limits_0^\infty H(\mu)\mu w\sin\mu w\ d\mu \ = \ -\mu H(\mu)\cos\mu w|_0^\infty + \int\limits_0^\infty (H(\mu)+\mu H'(\mu))\cos\mu w\ d\mu =$$
$$= \int\limits_0^\infty (H(\mu)+\mu H'(\mu))\cos\mu w\ d\mu.$$

We note that $\mu H(\mu)$ is odd function. Here the derivative $H'(\mu)$ gives the "additional" multiplier $z^{1/2}$, which is compensated by the presence of μ (see the estimate of the model integral (2.28)).

Generally speaking, we see from estimates of the function H and its derivatives with respect to μ, that we obtain the term $z^{1/2}$ or $z^{\kappa-i/2}$ in the final estimate whenever we differentiate the function H with respect to μ or multiply the integrand by $z^{\kappa}((\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})')^i$ (or $z^{\kappa}\mu^i$) respectively.

The routine calculations and the repeating of above arguments prove the estimate (2.31). □

We need also the estimates of the derivatives of G with respect to the spatial variables. Let us formulate without the proof

Lemma 2.4. *The derivatives $D_y^k G$, $D_t^l D_y^k G$ satisfy the following estimates*

$$\begin{aligned} |D_y^k G| &\le \tfrac{C}{t^k} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{-k/2} \end{array} \right\}, \\ |D_t^l D_y^k G| &\le \tfrac{C}{t^{k+l}} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{-k/2} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

It is of the special interest to obtain the estimates of $D_x^k G$ being much closer to (2.32).

Since we have considered in details the integration by parts contribution in the obtained estimates (see Lemma 2.1), in the further exposition our attention is restricted by the study of integrands only.

Lemma 2.5. *The derivatives $D_x^k G$ $(k = 1, 2)$ satisfy the following inequalities*

$$\begin{aligned} |G_x| &\le \tfrac{C}{t} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2 \\ \frac{1}{z^{1/2}} \left(\left(\frac{u}{v}\right)^{1/2} + \frac{u}{v} \right) \end{array} \right\}, \\ |G_{xx}| &\le \tfrac{C}{t^2} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2+u^4 \\ \frac{1}{z} \left(\frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^{3/2} \right) \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Proof. We distinguish the cases $z \le 1$ and $z > 1$. In the first case we have using (2.2)

$$\begin{aligned} H'_x = \tfrac{c_q}{t} \exp(-m^2 \mu\, coth\mu) \left(\tfrac{\mu}{sh\mu} \right)^b \\ \times \left(-\mu\, coth\mu\, r^q I_{-q}(r) + 2\, r^{q-1} I_{-q+1}(r) \left(u \tfrac{\mu}{sh\mu} \right)^2 \right), \end{aligned} \tag{2.34}$$

since

$$(r^q I_{-q}(r))' = r^q I_{-q+1}(r),\ r'_x = \frac{\xi^{1/2}}{t\, x^{1/2}} \frac{\mu}{sh\mu} = \frac{1}{\xi^{1/2} x^{1/2}} \frac{\xi}{t} \frac{\mu}{sh\mu} = \frac{2}{t} \frac{1}{r} \left(u \frac{\mu}{sh\mu}\right)^2.$$

Similarly we obtain

$$\begin{aligned} &H''_{xx}(\mu) = c_q \frac{1}{t^2} \exp(-m^2 \mu\, coth\, \mu) \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^b \\ &\times[-\mu\, coth\, \mu(-\mu\, coth\, \mu\ \ r^q I_{-q}(r) + 2\, r^{q-1} I_{-q+1}(r)(u\frac{\mu}{sh\mu})^2) \\ &-2\mu\, coth\, \mu\ \left(u\frac{\mu}{sh\mu}\right)^2 r^{q-1} I_{-q+1}(r) + 4(u\frac{\mu}{sh\mu})^4 r^{q-2} I_{-q+2}(r)]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

We can see that derivatives of G with respect to x of the $k-order$ have the multiplier of the form $\frac{1+u^2+\ldots+u^{2k}}{t^k}$, in view of the estimate $r^{q-l} I_{-q+l}(r) \le C$ for $0 \le r \le 1$.

Now we pass to the case $z > 1$. We suppose $r > 1$, since the study of the possibility case $z > 1,\ r \le 1$ is a combination of the cases $z \le 1$ and $z > 1,\ r > 1$ (see the estimates of i_2 in Lemma 2.1, for example).

We have

$$\begin{aligned} H'_x = c_q \exp(-(u-v)^2 \mu\, cth\, \mu - z(\mu\, cth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu})) \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^b \\ \times[2(u-v)\mu\, cth\, \mu\, v'_x \Phi(r) - z'_x(\mu\, cth\, \mu\ - \frac{\mu}{sh\mu})\Phi(r) + \Phi'(r)\, r'_x]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Since it's necessary to pick out the multipliers like $\frac{1}{t}, \frac{1}{tz^{1/2}}$ we write

$$\begin{gathered} r'_x = \frac{r}{2x} = \frac{z}{2\,x} \frac{\mu}{sh\mu} = \frac{r}{t\,z} \frac{u}{v}, \quad z_x = \frac{z}{2x} = \frac{u}{tv}, \\ v_x = \frac{1}{2tv} = \frac{1}{2tv^{1/2} u^{1/2}} \left(\frac{u}{v}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2} t z^{1/2}} \left(\frac{u}{v}\right)^{1/2}, \end{gathered}$$

so that (by (2.10))

$$\begin{aligned} |H'_x| \le c \frac{z^{q-\frac{1}{2}}}{t\, z^{1/2}} \exp\left(-\gamma(u-v)^2 \mu\, coth\, \mu - z\left(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\, \mu}\right)\right) \left(\frac{\mu}{sh\mu}\right)^{1/2} \\ \times \left[(\mu\, coth\, \mu)^{1/2} \left(\frac{u}{v}\right)^{1/2} + \frac{u}{z^{1/2} v} z(\mu\, coth\, \mu - \frac{\mu}{sh\mu}) + \frac{1}{z^{1/2}} \frac{u}{v}\right]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

The second order derivative H''_{xx} has the form

$$
\begin{aligned}
H''_{xx}(\mu) = c_q \exp(-(u-v)^2\mu\, coth\,\mu - z(\mu\, coth\,\mu - \tfrac{\mu}{sh\mu}))\left(\tfrac{\mu}{sh\mu}\right)^b \\
\times \left\{-2(v'_x)^2\mu\, coth\,\mu\,\Phi(r) + 2(u-v)\mu\, coth\,\mu\, v''_x\Phi(r)\right. \\
+\left[2(u-v)\mu\, coth\,\mu\, v'_x - z'_x(\mu\, coth\,\mu\, - \tfrac{\mu}{sh\mu})\right]\,\Phi'(r)r'_x + \tfrac{1}{2}(\Phi'(r)r)'\tfrac{r}{2x^2} \\
\left.-\tfrac{1}{2x^2}\Phi'(r)r\, - H'_x[2(u-v)\mu\, coth\,\mu\, v'_x - z'_x(\mu\, coth\,\mu\, - \tfrac{\mu}{sh\mu})]\right\},
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

and here we will use the equations

$$
(v'_x)^2 = \tfrac{1}{4t^2v^2},\, v''_x = -\tfrac{1}{4t^{1/2}x^{3/2}} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}t^2z^{3/2}}\left(\tfrac{u}{v}\right)^{3/2},\, \tfrac{1}{x^2} = \tfrac{4}{t^2z^2}\left(\tfrac{u}{v}\right)^2.
$$

The assertion of Lemma 2.5 follows from (2.34)-(2.38). $\square$

Now we formulate the integral estimates for derivatives of the function $G(x,\xi,y,t)$ which are used below.

Lemma 2.6. *The estimate*

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G_t(x,\xi,y,t)|dy + \sum_{|l|=1}\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|D^lG(x,\xi,y,t)|dy+ \\
+\sum_{|l|=2}\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|xD^lG(x,\xi,y,t)|dy \le \tfrac{c}{t}
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

is satisfied.

Proof. We estimate the integrals for xG_{xx}, xG_{yy}, for example.

The change of variables $u = \left(\frac{\xi}{t}\right)^{1/2}$, $w = \frac{y}{t}$ leads to the inequality (see also (2.30),(2.32))

$$
\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|xG_{yy}|dy = 2\int\limits_0^\infty ut^2du\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|xG_{yy}|dw \le c\int\limits_0^\infty \frac{x}{t^2}u^{1-2q}\left\{\frac{1}{z^{q-3/2}}\right\}\exp(-\gamma(u-v)^2)du.
$$

Noticing the estimates (2.11), (2.13), we have

$$
\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|xG_{yy}|dy \le c(\frac{1}{t}v^2\exp(-\gamma v^2)+\frac{1}{t}) \le \frac{c}{t}.
$$

The same estimate holds for xG_{xx}:

$$\int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |xG_{xx}| dy \leq c \int\limits_0^\infty \frac{x}{t^2} u^{1-2q} \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2 \\ z^{q-3/2}\left(\frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^{3/2}\right) \end{array} \right\} \exp(-\gamma(u-v)^2) du \leq \frac{c}{t},$$

since the appearence in the corresponding integrand of the term like u^k for $z \leq 1$ and the powers of $\frac{u}{v}$ for $z > 1$ doesn't make any alterations in the estimates of integrals (see (2.11), (2.12)).□

From (2.31), (2.32) we can easily verify that as a result of the each differentiation of G with respect to t we obtain the multiplier $\frac{1}{t}$ and that the differentiation with respect to y gives the additional multiplier $\frac{1}{t}\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{1/2} \end{array} \right\}$. So we can formulate the next assertion.

Lemma 2.7. *The following inequalities are fulfilled:*

$$\begin{aligned} |D_t D_y^k D_x G| &\leq \tfrac{C}{t^{k+2}} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2 \\ z^{-(k+1)/2}\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{1/2} + \frac{u}{v}\right) \end{array} \right\}, \\ |D_t D_y^k D_x^2 G_{xx}| &\leq \tfrac{C}{t^{k+3}} g(u,v,t,\gamma) Y_2(z,w) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2+u^4 \\ z^{-k/2-1}\left(\frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^{3/2}\right) \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

We can also derive the following estimates of the function $G(x,\xi,y,t)$ with cubic decreasing with respect to y.

Lemma 2.8. *The third order derivatives of G with respect to spatial variables satisfy the inequalities:*

$$|G_{yyy}| \leq \frac{C}{t^3} g(u,v,t,\gamma) Y_3(w,z) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{-\frac{3}{2}} \end{array} \right\},$$

$$|G_{xyy}| \leq \frac{C}{t^3} g(u,v,t,\gamma) Y_3(w,z) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2 \\ z^{-\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{1/2} + \frac{u}{v}\right) \end{array} \right\},$$

$$|G_{xxy}| \leq \frac{C}{t^3} g(u,v,t,\gamma) Y_3(w,z) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2+u^4 \\ z^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \end{array} \right\},$$

$$|G_{xxx}| \leq \frac{C}{t^3} g(u,v,t,\gamma) Y_3(w,z) \left\{ \begin{array}{c} 1+u^2+u^4+u^6 \\ z^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{u}{v}\right)^3\right) \end{array} \right\}. \tag{2.41}$$

3. A priori estimates of a solution to the model problem.

We consider the function

$$u(x,y,t) =$$

$$= \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,y-\eta,t)u_0(\xi,\eta)d\eta + \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,y-\eta,t-\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\eta =$$

$$= u^{(1)}(x,y,t) + u^{(2)}(x,y,t), \tag{3.1}$$

with $u_0 \in C_s^{2+\alpha}(\overline{D})$, $f \in C_s^{\alpha}(\overline{D}_T)$ and prove that $u \in C_s^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$ is in fact the unique solution of the model problem (0.8) and moreover the estimate

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{D_T}^{(2+\alpha)} \le c\left(\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} + \langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)}\right) \tag{3.2}$$

holds.

Remark 3.1. *We note that in $C_{s,0}^{\alpha}(\overline{D}_T)$, $C_{s,0}^{2+\alpha}(\overline{D}_T)$ the standard norms and the seminorms $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ are equivalent.*

Let us introduce the following notation

$$(K * \psi)(x,y,t) = \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi,y-\eta,t)(\psi(\xi,\eta)-\psi(x,y))d\eta$$

with a certain kernel $K(x,\xi,y,t))$ and $\psi \in C_s^{\alpha}(\overline{D})$.

Lemma 3.1. *The estimate*

$$|(G*\psi)(x,y,t)| \le C\langle\phi\rangle_D^{(\alpha)} t^{\alpha/2} \tag{3.3}$$

with C independent of x,y,t is valid.
Proof. For arbitrary $t>0$ we use the inequalities

$$\frac{|x-\xi|+|y-\eta|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}+\sqrt{|y-\eta|}} \le \left|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}\right| + \frac{|y-\eta|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}} \le c\sqrt{t}\left(|u-v| + \frac{|y-\eta|}{t\sqrt{z}}\right), \text{ if } z>1,$$
$$\frac{|x-\xi|+|y-\eta|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}+\sqrt{|y-\eta|}} \le \left|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}\right| + \sqrt{|y-\eta|} \le c\sqrt{t}\left(|u-v| + \sqrt{\frac{|y-\eta|}{t}}\right), \text{ if } z\le 1, \tag{3.4}$$

where $u=\sqrt{\frac{\xi}{t}}$, $v=\sqrt{\frac{x}{t}}$, $z=2uv$. We have

$$|(G*\psi)(x,y,t)| \le c\langle\psi\rangle_D^{(\alpha)} t^{\alpha/2}$$

$$\times\left[\int\limits_{\{\xi:z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(x,\xi,y-\eta,t)| \left(|u-v|^{\alpha}+\left(\frac{|y-\eta|}{t}\right)^{\alpha/2}\right) d\eta\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\{\xi:z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(x,\xi,y-\eta,t)| \left(|u-v|^{\alpha}+\left(\frac{|y-\eta|}{t\sqrt{z}}\right)^{\alpha}\right) d\eta\right].$$

We change the variable of integration $u=\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{1/2}$ in both integrals, $w=\frac{y-\eta}{t}$ in the first term and $\sigma=\frac{y-\eta}{t\sqrt{z}}$ in the second one, hence, by (2.29),

$$|(G*\psi)(x,y,t)| \le c\langle\psi\rangle_D^{(\alpha)} t^{\alpha/2}$$

$$\times\left[\int\limits_0^{1/2v} d\,u \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^{1-2q}\exp(-\gamma(u-v)^2)\frac{|u-v|^{\alpha}+w^{\alpha/2}}{1+w^2}dw\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/2v}^{\infty} d\,u \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^{1-2q}z^{q-1/2}\exp(-\gamma(u-v)^2)\frac{|u-v|^{\alpha}+|\sigma|^{\alpha}d\sigma}{1+\sigma^2}d\sigma\right].$$

In view of the inequality $|u-v|^{\alpha}\exp(-\gamma(u-v)^2)\le c\exp(-\gamma_{\alpha}|u-v|^2)$, with $\gamma_{\alpha}<\gamma$ and the estimate (2.13) we conclude that the estimate (3.3) is true. $\Box$

Remark 3.2 *In a way similar to that used we obtain that*

$$\max_{(x,y)\in\overline{D}}\left(|(G_t*\psi)|+\sum_{|l|=1}|\left(D^lG*\psi\right)|+\sum_{|l|=2}|(xD^lG*\psi)|\right)\le C\langle\phi\rangle_D^{(\alpha)}t^{\frac{\alpha}{2}-1}. \qquad (3.5)$$

Remark 3.3. *The standard procedure allows to obtain from (3.3) and the identity*

$$\int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,\eta,t)d\eta=1 \qquad (3.6)$$

that the function $u(x,y,t)$ from (3.1) is in fact the solution of the model problem (0.8).

In order to avoid repetitions in proving of the estimate (3.2) we consider xu_{yy}, i.e. $xu_{yy}^{(1)}$ and $xu_{yy}^{(2)}$, for example .

First we derive the estimates of $xu^{(1)}_{yy}$. It is easy to see that

$$xu^{(1)}_{yy}(x,y,t) = \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_y(x,\xi,y-\eta,t)u_{0\eta}(\xi,\eta)d\eta.$$

Afterwards we will integrate by parts on η one more time in the integral over $\{z>1\}$.

Lemma 3.2. *The function $xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)$ satisfies the estimate*

$$\langle\langle xu^{(1)}_{yy}\rangle\rangle^{(\alpha)}_{D_T} \le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_D. \tag{3.7}$$

Proof. We estimate the Hölder constants with respect to time and spatial variables separately.

First we prove that

$$\langle\langle xu^{(1)}_{yy}\rangle\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_D. \tag{3.8}$$

By using the identity (3.6), we see that

$$\begin{gathered} xu^{(1)}_{yy}(x,y,\bar t) - xu^{(1)}_{yy}(x,y,t) \\ = \int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{\eta\tau}(x,\xi,y-\eta,\tau)(u_{0y}(x,y)-u_{0\eta}(\xi,\eta))d\eta \\ = \int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{\{\xi:z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{\eta\tau}(x,\xi,y-\eta,\tau)(u_{0y}(x,y)-u_{0\eta}(\xi,\eta))d\eta \\ -\int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{\{\xi:z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x,\xi,y-\eta,\tau)(-xu_{0\eta\eta}(\xi,\eta) \\ +\xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta) - \xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta) + xu_{0yy}(x,y) - xu_{0yy}(x,y))d\eta \end{gathered}$$

or

$$\begin{gathered} xu^{(1)}_{yy}(x,y,\bar t) - xu^{(1)}_{yy}(x,y,t) \\ = \int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{\{\xi:z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{\eta\tau}(x,\xi,y-\eta,\tau)(u_{0y}(x,y)-u_{0\eta}(\xi,\eta))d\eta \\ -\int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{\{\xi:z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x,\xi,y-\eta,\tau)(xu_{0yy}(x,y)-\xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta))d\eta \\ -\int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{\{\xi:z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x,\xi,y-\eta,\tau)\tfrac{\xi-x}{\xi}\xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta)d\eta \\ +\int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{\{\xi:z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x,\xi,y-\eta,\tau)xu_{0yy}(x,y)d\eta = i_1+i_2+i_3+i_4. \end{gathered} \tag{3.9}$$

In order to estimate i_1 we apply (3.4), then the estimates (2.32), (2.11) and obtain

$$|i_1| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_0^{1/2v} \tfrac{x}{\tau^2} u^{1-2q} \exp(-\gamma(u-v)^2)\tau^{\alpha/2} du$$
$$\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} v^2 \exp(-\gamma v^2) d\tau \le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\bar t - t|^{\alpha/2}.$$

By using (3.5), we deduce that

$$|i_2| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\bar t - t|^{\alpha/2}.$$

We remember that $u_0 \in C_s^{2+\alpha}(\overline{D})$, so that $xu_{0yy}(x,y)|_{x=0} = 0$ (see Proposition 1.1) and

$$|xu_{0yy}(x,y)| = |xu_{0yy}(x,y) - xu_{0yy}(x,y)|_{x=0}| \le \langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} x^{\alpha/2}. \tag{3.10}$$

Noticing the estimates (2.32), (3.10), we have $\left(\xi^{\alpha/2} = u^\alpha \tau^{\alpha/2}\right)$

$$\begin{aligned} |i_3| &\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_{1/2v}^{\infty} \tfrac{1}{\tau} u^{1-2q} z^{q-1/2} \exp(-\gamma(u-v)^2) \tfrac{|v^2-u^2|}{u^2} u^\alpha \tau^{\alpha/2} du \\ &\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \int\limits_{1/2v}^{\infty} u^{1-2q} z^{q-1/2} \exp(-\gamma_\alpha(u-v)^2) \tfrac{|v+u|}{u^2} u^\alpha du. \end{aligned} \tag{3.11}$$

We denote the inner integral by j and estimate it by using (2.11)

$$j \le \left\{ \begin{array}{cc} (v+1)\exp(-\gamma_\alpha/(16v^2)), & v \le 1, \\ v^{\alpha-1}, & v > 1, \end{array} \right\} \le c.$$

Finally

$$|i_3| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\bar t - t|^{\alpha/2}.$$

We make use of the identity (3.6), then (2.32), (3.10) and (2.12) in order to derive that $\left(x^{\alpha/2} = v^\alpha \tau^{\alpha/2}\right)$

$$\begin{aligned} |i_4| &\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} d\tau \int\limits_0^{1/2v} \tau^{\alpha/2-1} u^{1-2q} \exp(-\gamma(u-v)^2) v^\alpha du \\ &\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_t^{\bar t} \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} v^\alpha \exp(-\gamma v^2) d\tau \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\bar t - t|^{\alpha/2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Summing the estimates of i_1, i_2, i_3, i_4 , we infer that the estimate (3.8) holds.

In order to estimate the difference $xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)-\overline{x}u^{(1)}_{yy}(\overline{x},y,t)$ we prove the following estimates

$$|xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)|\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}x^{\alpha/2}, \tag{3.13}$$

$$|xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)-\overline{x}u^{(1)}_{yy}(\overline{x},y,t)|\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}\left|\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}\right|^{\alpha}, \tag{3.14}$$

$$|xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)-xu^{(1)}_{\overline{y}\overline{y}}(x,\overline{y},t)|\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}\left|\tfrac{y-\overline{y}}{\sqrt{x}}\right|^{\alpha}, \tag{3.15}$$

with c independent of x, $\overline{x}$, y, $\overline{y}$, t.

In view of (3.14), (3.15) we will have

$$|xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)-\overline{x}u^{(1)}_{\overline{y}\overline{y}}(\overline{x},\overline{y},t)|\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}\left(\frac{|x-\overline{x}|+|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}+\sqrt{\overline{x}}}\right)^{\alpha}. \tag{3.16}$$

The application of Proposition 2.2.A with estimates (3.13), (3.16) shows that

$$\langle xu^{(1)}_{yy}\rangle^{(\alpha)}_{x,y,D_T}\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}. \tag{3.17}$$

First we estimate $|xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)|$. Similarly to (3.9) we have

$$\begin{aligned} &xu^{(1)}_{yy}(x,y,t)=\\ &=\int_0^\infty d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}xG_\eta(x,\xi,y-\eta,t)(u_{0y}(x,y)-u_{0\eta}(\xi,\eta))d\eta\\ &=\int_{\{z\le1\}}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}xG_\eta(x,\xi,y-\eta,t)(u_{0y}(x,y)-u_{0\eta}(\xi,\eta))d\eta\\ &+\int_{\{z>1\}}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}xG(x,\xi,y-\eta,\tau)u_{0\eta\eta}(\xi,\eta)d\eta=j_1+j_2. \end{aligned}$$

Reasoning in a similar way as in Lemma 3.1 we use the estimates (2.32), (2.12), the equation $t^{\alpha/2}=x^{\alpha/2}v^{-\alpha}$ so that

$$\begin{aligned} |j_1|&\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}x^{\alpha/2}\int_0^{1/2v}\tfrac{x}{t}v^{-\alpha}u^{1-2q}\exp(-\gamma(u-v)^2)du\\ &\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}x^{\alpha/2}v^{2-\alpha}\exp(-\gamma v^2)\le c\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}x^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

With the help of (3.10) we get

$$|xu_{0\eta\eta}(\xi,\eta)|\le\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}x\xi^{\alpha/2-1}=\langle u_0\rangle^{(2+\alpha)}_{D}\left(\tfrac{u}{v}\right)^{2-\alpha}x^{\alpha/2}$$

therefore

$$|j_2| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} x^{\alpha/2} \int\limits_{1/2v}^{\infty} \left(\frac{v}{u}\right)^{2-\alpha} u^{1-2q} z^{q-1/2} \exp(-\gamma(u-v)^2) du \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} x^{\alpha/2}.$$

This completes the proof of (3.13).

The next step is to obtain the estimate (3.14). We distinguish the cases *a)* $\sqrt{t} \ge |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|$ and *b)* $\sqrt{t} \le |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|$.

In the case *a)* the final point of calculations would be the following inequality ($v = (\frac{\theta}{t})^{1/2}$):

$$\int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{\alpha/2-1} v^{-1} d\theta = \int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{(\alpha-1)/2} \theta^{-1/2} d\theta = 2|\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|\ t^{(\alpha-1)/2} \le 2|\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|^{\alpha}. \qquad (3.18)$$

We have

$$\begin{aligned} &x u_{yy}^{(1)}(x,y,t) - \overline{x} u_{yy}^{(1)}(\overline{x},y,t) = \\ &= \int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\theta G_\eta)_\theta(\theta,\xi,y-\eta,\tau)(u_{0y}(\theta,y) - u_{0\eta}(\xi,\eta)) d\eta \\ &= \int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(\theta,\xi,y-\eta,\tau)(u_{0y}(\theta,y) - u_{0\eta}(\xi,\eta)) d\eta \\ &+ \int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta G_{\eta\theta}(\theta,\xi,y-\eta,\tau)(u_{0y}(\theta,y) - u_{0\eta}(\xi,\eta)) d\eta = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Instead of the estimate (3.5) for $(G_y * \psi)$ we use now the more precise estimate of the form

$$|(G_y * \psi)(x,y,t)| \le c\langle\psi\rangle_D^{(\alpha)} t^{\alpha/2-1} \left(\exp(-\gamma v^2) + v^{-1}\right),$$

which follows from (2.32) and (2.11), (2.12).

Thus we have

$$\begin{aligned} |I_1| &\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \left| \int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{\alpha/2-1} \exp(-\gamma_1 v^2) d\theta + \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{t^{\alpha/2-1}}{v} d\theta \right| \\ &= c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \left| \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{t^{\alpha/2-1}}{v} v \exp(-\gamma_1 v^2) d\theta + \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{t^{\alpha/2-1}}{v} d\theta \right| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|^{\alpha}, \end{aligned}$$

here we applied (3.18) and the inequality $v\exp(-\gamma_1 v^2) \le c$. Further we use for I_2 the same representation as in (3.9):

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{\{z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta G_{\eta\theta}(\theta,\xi,y-\eta,t)(u_{0y}(\theta,y)-u_{0\eta}(\xi,\eta))d\eta \\
-\int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{\{z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\theta}(\theta,\xi,y-\eta,t)(\theta u_{0yy}(\theta,y)-\xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta))d\eta \\
-\int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{\{z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\theta}(\theta,\xi,y-\eta,t)\tfrac{\xi-\theta}{\xi}\xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta)d\eta \\
+\int\limits_{\overline{x}}^{x} d\theta \int\limits_{\{z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\theta}(\theta,\xi,y-\eta,t)\theta u_{0yy}(\theta,y)d\eta \\
= I_2^{(1)} + I_2^{(2)} + I_2^{(3)} + I_2^{(4)}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

and we apply the same tricks.

In comparison with G in the estimate of $\theta G_{\eta\theta}$ the additional factor $\frac{\theta}{t^2} = \frac{v^2}{t}$ appears when $z \le 1$. Then we argue similarly to the proof of Lemma 3.1 and obtain

$$
|I_2^{(1)}| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{\alpha/2-1} v^2 \exp(-\gamma_1 v^2) d\theta.
$$

Now we use (3.18) again so that

$$
|I_2^{(1)}| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{t^{\alpha/2-1}}{v} v^3 \exp(-\gamma_1 v^2) d\theta \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}|^{\alpha}.
$$

Almost like as for I_1 we obtain

$$
|I_2^{(2)}| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \tfrac{t^{\alpha/2-1}}{v} d\theta \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}|^{\alpha}.
$$

Further for $I_2^{(3)}$ we have (compare with (3.11)) from (2.33), (2.11)

$$
\begin{aligned}
|I_2^{(3)}| &\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{\frac{\alpha}{2}-1} d\theta \int\limits_{1/2v}^{+\infty} \left(\left(\tfrac{u}{v}\right)^{1/2} + \tfrac{u}{v} \right) u^{1-2q} z^{q-1} \exp(-\gamma_\alpha (u-v)^2) \tfrac{|v+u|}{u^2} u^{\alpha} du \\
&\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{\alpha/2-1} \left\{ \begin{array}{ll} v^{-1/2}\exp(-\gamma_\alpha/(16v^2)), & v \le 1, \\ v^{\alpha-2}, & v > 1, \end{array} \right\} d\theta \\
&\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \tfrac{t^{\alpha/2-1}}{v} d\theta \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}|^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

In comparison with the estimates of G_t for G_x, when $z \le 1$, we have the additional multiplier $\left(1+u^2\right)$, which doesn't give a contribution in the estimate of corresponding integral (see (2.12)). So we have

$$|I_2^{(4)}| \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} t^{\alpha/2-1} v^\alpha \exp(-\gamma v^2) d\theta$$
$$\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{t^{\alpha/2-1}}{v} d\theta \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|^\alpha$$

(compare with the integrand in (3.12)).

The summing up of the estimates I_1, $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2}$, $I_2^{(3)}$, $I_2^{(4)}$ shows that (3.14) holds in the case a).

In the case b) the estimate (3.14) is the corollary of (3.8). Indeed we have

$$|xu_{yy}^{(1)}(x,y,t) - \overline{x}u_{yy}^{(1)}(\overline{x},y,t)| \le |xu_{yy}^{(1)}(x,y,t) - xu_{yy}^{(1)}(x,y,0)|$$
$$+|\overline{x}u_{yy}^{(1)}(\overline{x},y,t) - \overline{x}u_{yy}^{(1)}(\overline{x},y,0)| + |xu_{yy}^{(1)}(x,y,0) - \overline{x}u_{yy}^{(1)}(\overline{x},y,0)|$$
$$\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} (t^{\alpha/2} + |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|^\alpha) \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|^\alpha.$$

Hence the estimate (3.14) is established.

In order to obtain (3.15) we distinguish the cases a) $\sqrt{t} \ge \frac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}}$, b) $\sqrt{t} \le \frac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}}$.

At once we note that in the case b) we use (3.8) again, i.e.

$$|xu_{yy}^{(1)}(x,y,t) - xu_{\overline{yy}}^{(1)}(x,\overline{y},t)| \le |xu_{yy}^{(1)}(x,y,t) - xu_{yy}^{(1)}(x,y,0)|$$
$$+|xu_{\overline{yy}}^{(1)}(x,\overline{y},t) - xu_{\overline{yy}}^{(1)}(x,\overline{y},0)| + |xu_{yy}^{(1)}(x,y,0) - xu_{\overline{yy}}^{(1)}(x,\overline{y},0)|$$
$$\le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \left(t^{\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}}\right)^\alpha\right) \le c\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)} \left(\frac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}}\right)^\alpha.$$

In the case a)we have

$$xu_{yy}^{(1)}(x,y,t) - xu_{\overline{yy}}^{(1)}(x,\overline{y},t) =$$
$$= \int\limits_{\overline{y}}^{y} d\theta \int\limits_{0}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{\eta\eta}(x,\xi,\theta-\eta,t)(u_{0\eta}(\xi,\eta) - u_{0\theta}(x,\theta))d\eta$$
$$= \int\limits_{\overline{y}}^{y} d\theta \int\limits_{\{z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{\eta\eta}(x,\xi,\theta-\eta,t)(u_{0\eta}(\xi,\eta) - u_{0\theta}(x,\theta))d\eta$$
$$+ \int\limits_{\overline{y}}^{y} d\theta \int\limits_{\{z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x,\xi,\theta-\eta,t)(xu_{0yy}(x,y) - \xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta))d\eta$$
$$+ \int\limits_{\overline{y}}^{y} d\theta \int\limits_{\{z>1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x,\xi,\theta-\eta,t)\frac{\xi-x}{\xi}\xi u_{0\eta\eta}(\xi,\eta)d\eta$$
$$+ \int\limits_{\overline{y}}^{y} d\theta \int\limits_{\{z\le 1\}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x,\xi,\theta-\eta,t)xu_{0yy}(x,y)d\eta.$$

Now following the same arguments, that were used to estimate I_2 in (3.19) we come in all integrals to the inequality ($v = (\frac{x}{t})^{1/2}$)

$$\left| \int\limits_{\overline{y}}^{y} t^{\alpha/2-1} v^{-1} d\theta \right| = t^{(\alpha-1)/2} \frac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}} \leq \left| \frac{y-\overline{y}}{\sqrt{x}} \right|^{\alpha}$$

instead of (3.18). This shows that the estimate (3.15) is true.

The above reasonings lead to (3.17) and the proof of Lemma 3.2 is finished. □

Next we pass to the estimates of $xu_{yy}^{(2)}(x, y, t)$. We have in view of (3.6)

$$xu_{yy}^{(2)}(x, y, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{yy}(x, \xi, y-\eta, t-\tau)[f(\xi, \eta, \tau) - f(x, y, \tau)]d\eta.$$

First we derive the estimate of Hölder constant with respect to t.

Lemma 3.3. *The following estimate*

$$\left\langle xu_{yy}^{(2)} \right\rangle_{t,D_T}^{(\alpha/2)} \leq c\,\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \tag{3.20}$$

is satisfied.

Proof. We suppose without loss of generality that $t \geq \overline{t}$ and obtain

$$xu_{yy}^{(2)}(x, y, t) - xu_{yy}^{(2)}(x, y, \overline{t}) =$$

$$= \int\limits_{2\overline{t}-t}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} xG_{yy}(x, \xi, y-\eta, t-\tau)[f(\xi, \eta, \tau) - f(x, y, \tau)]d\eta$$

$$- \int\limits_{2\overline{t}-t}^{\overline{t}} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} xG_{yy}(x, \xi, y-\eta, \overline{t}-\tau)[f(\xi, \eta, \tau) - f(x, y, \tau)]d\eta$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{2\overline{t}-t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} (xG_{yy}(x, \xi, y-\eta, t-\tau) - xG_{yy}(x, \xi, y-\eta, \overline{t}-\tau))$$

$$\times [f(\xi, \eta, \tau) - f(x, y, \tau)]d\eta = i_1 + i_2 + i_3.$$

The integrals i_1, i_2 are estimated in a similar way. By using (3.5), we have

$$|i_1| + |i_2| \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\int\limits_{2\overline{t}-t}^{t} |t-\tau|^{\alpha/2-1} d\tau + \int\limits_{2\overline{t}-t}^{t} |\overline{t}-\tau|^{\alpha/2-1} d\tau \right) \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} |t-\overline{t}|^{\alpha/2}.$$

Since the estimates of xG_{yy} and xG_{yyt} differ one from another only by the multiplier t^{-1}, we obtain

$$|i_3| = \int\limits_{\overline{t}}^{t} d\theta \int\limits_{-\infty}^{2\overline{t}-t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} xG_{yy\theta}(x,\xi,y-\eta,\theta-\tau)[f(\xi,\eta,\tau)-f(x,y,\tau)]d\eta \leq$$
$$\leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \int\limits_{\overline{t}}^{t} d\theta \int\limits_{-\infty}^{2\overline{t}-t} |\theta-\tau|^{\alpha/2-2} d\tau \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} |t-\overline{t}|^{\alpha/2}.$$

Hence the assertion of Lemma 3.3 holds. $\square$

Further we derive the estimates

$$|xu_{yy}^{(2)}(x,y,t)| \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} x^{\alpha/2} \quad , \tag{3.21}$$

$$|xu_{yy}^{(2)}(x,y,t) - \overline{x}u_{\overline{yy}}^{(2)}(\overline{x},\overline{y},t)| \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\frac{|x-\overline{x}|+|y-\overline{y}|}{\sqrt{x}+\sqrt{\overline{x}}}\right)^{\alpha} \tag{3.22}$$

(compare with (3.13), (3.16)).

Lemma 3.4. *The estimate (3.21) is valid.*
Proof. We have

$$xu_{yy}^{(2)}(x,y,t) = \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)\,[f(\xi,\eta,t-\tau)-f(x,y,t-\tau)]\,d\eta.$$

Arguing similarly to Lemma 3.1, we obtain

$$|xu_{yy}^{(2)}(x,y,t)| \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} x^{\alpha/2} \int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{\tau^2} v^{-\alpha} u^{1-2q} \exp(-\gamma(u-v)^2) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z^{q-3/2} \end{array} \right\} du.$$

We change the variable of integration $v = \left(\frac{x}{\tau}\right)^{1/2}$ $\left(\frac{x}{\tau^2}d\tau = -2vdv\right)$ and apply the estimates (2.11), (2.12) then

$$\begin{aligned} |xu_{yy}^{(2)}(x,y,t)| &\leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} x^{\alpha/2} (\int\limits_{0}^{\infty} v^{1-\alpha}\exp(-\gamma v^2)dv \\ &+ \int\limits_{0}^{1} v^{1-\alpha}dv \int\limits_{1/2v}^{\infty} u^{1-2q}z^{q-3/2}\exp(-\gamma(u-v)^2)du \\ &+ \int\limits_{1}^{\infty} v^{1-\alpha}dv \int\limits_{1/2v}^{\infty} u^{1-2q}z^{q-3/2}\exp(-\gamma(u-v)^2)du) \end{aligned}$$
$$\leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} x^{\alpha/2} \left(1 + \int\limits_{0}^{1} v^{1-\alpha}\exp(-\gamma/(16v^2))dv + \int\limits_{1}^{\infty} v^{-1-\alpha}dv\right) \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} x^{\alpha/2}.\square$$

Lemma 3.5 *The estimate (3.22) is true.*
Proof. We suppose for the sake of convenience that $\overline{x} \le x$ and distinguish the cases $a)$ $\sqrt{\overline{x}} \le |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|$ and $b)$ $\sqrt{\overline{x}} \ge |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|$.

We denote by

$$\rho = |x - \overline{x}| + |y - \overline{y}|, \ \ h = \frac{\rho}{\sqrt{x} + \sqrt{\overline{x}}}.$$

In the case $a)$ we have $\sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}} + \sqrt{\overline{x}} \le 2(\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}})$. Now it follows from (3.21) that

$$|xu_{yy}^{(2)}(x,y,t) - \overline{x}u_{\overline{y}\overline{y}}^{(2)}(\overline{x},\overline{y},t)| \le$$

$$\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}(x^{\alpha/2} + \overline{x}^{\alpha/2}) \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}|x^{1/2} - \overline{x}^{1/2}|^{\alpha} \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^{\alpha}.$$

We note that if $\overline{x} \le x$, $\sqrt{\overline{x}} \ge |\sqrt{x} - \sqrt{\overline{x}}|$ (case $b)$) then

$$h \le \tfrac{\rho}{\sqrt{x}} \le 2h, \ h \le \tfrac{\rho}{\sqrt{\overline{x}}} \le 3h.$$

We apply below these inequalities without additional mentions.

We use the following representation in the case $b)$:

$$\begin{aligned}
&xu_{yy}^{(2)}(x,y,t) - \overline{x}u_{\overline{y}\overline{y}}^{(2)}(\overline{x},\overline{y},t) = \\
&\quad = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{|y-\eta|\le 2\rho} xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau)]d\eta \\
&\quad - \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{|y-\eta|\le 2\rho} \overline{x}G_{\overline{y}\overline{y}}(\overline{x},\xi,y-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\eta \\
&\qquad + \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{|y-\eta|>2\rho} (xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau) - \overline{x}G_{\overline{y}\overline{y}}(\overline{x},\xi,\overline{y}-\eta,\tau)) \\
&\qquad\qquad \times[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\eta \\
&\quad + \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{|y-\eta|>2\rho} xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)[f(x,y,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\eta
\end{aligned}$$

$$= i_1 + i_2 + i_3 + i_4.$$

Since

$$\int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)d\eta = 0$$

we have

$$i_4=\int\limits_0^\infty[f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)-f(x,y,t-\tau)]d\tau\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{|y-\eta|\le 2\rho}xG_{\eta\eta}(x,\xi,y-\eta,\tau)d\eta$$

$$=\int\limits_0^\infty[f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)-f(x,y,t-\tau)]d\tau(\int\limits_{\{\xi:\,z\le 1\}}d\xi\int\limits_{|y-\eta|\le 2\rho}xG_{\eta\eta}(x,\xi,y-\eta,\tau)d\eta$$

$$+\int\limits_{\{\xi:\,z>1\}}d\xi\int\limits_{|y-\eta|\le 2\rho}xG_{\eta\eta}(x,\xi,y-\eta,\tau)d\eta)=i_{4.1}+i_{4.2}.$$

By successive application of the estimates (2.32), (2.11) we have $\left(\frac{x}{\tau^2}d\tau=-2vdv\right)$

$$i_{4.1}\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^\alpha\int\limits_0^\infty vdv\int\limits_0^{1/2v}u^{1-2q}\exp(-\gamma(u-v)^2)du$$
$$\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^\alpha\int\limits_0^\infty v\exp(-\gamma v^2)dv\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^\alpha.$$

The integral $i_{4.2}$ can be represented as the sum of integrals

$$i_{4.2}=\int\limits_0^{h^2}[f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)-f(x,y,t-\tau)]d\tau\int\limits_{\{z>1\}}d\xi\int\limits_{|\eta|\le 2\rho}xG_{\eta\eta}(x,\xi,\eta,\tau)d\eta$$
$$+\int\limits_{h^2}^\infty[f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)-f(x,y,t-\tau)]d\tau\int\limits_{\{z>1\}}d\xi\int\limits_{|\eta|\le 2\rho}xG_{\eta\eta}(x,\xi,\eta,\tau)d\eta=i_{4.2}^{(1)}+i_{4.2}^{(2)}.$$

Since $xG_{\eta\eta}(x,\xi,\eta,\tau)$ is the even function of the variable η, we have

$$i_{4.2}^{(1)}=2\int\limits_0^{h^2}[f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)-f(x,y,t-\tau)]d\tau\int\limits_{\{z>1\}}xG_\eta(x,\xi,2\rho,\tau)d\xi.$$

In view of the estimate

$$\frac{z^{1/2}}{z+\left(\frac{2\rho}{\tau}\right)^2}\le\frac{z^{1/2}}{4z^{1/2}\frac{\rho}{\tau}}=\frac{\tau}{4\rho}$$

we get

$$|i_{4.2}^{(1)}|\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^\alpha\int\limits_0^{h^2}d\tau\int\limits_{1/2v}^\infty\tfrac{x}{\tau\rho}u^{1-2q}z^{q-1}\exp(-\gamma(u-v)^2)du$$
$$\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}\,h^\alpha\,\tfrac{x^{1/2}}{\rho}\int\limits_0^{h^2}\tfrac{d\tau}{\tau^{1/2}}\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^\alpha.$$

Next the estimate like to the following

$$\int\limits_{|\eta|\le\rho}\tfrac{z^{1/2}}{z+\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2}d\eta\le 2\rho\max_\eta\tfrac{z^{1/2}}{z+\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2}\le\tfrac{2\rho}{z^{1/2}}\tag{3.24}$$

is useful for evaluation of the term $i_{4.2}^{(2)}$:

$$|i_{4.2}^{(2)}| \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha \int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau (\int\limits_{\{\xi:z>1\}} d\xi \int\limits_{|\eta|\le 2\rho} |xG_{\eta\eta}(x,\xi,\eta,\tau)| d\eta$$
$$\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha \int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{1/2v}^{\infty} \tfrac{x\rho}{\tau^2\, z^{3/2}} \tfrac{u^{1-2q} z^{q-1/2}}{\tau} \exp(-\gamma(u-v)^2) du$$
$$\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha \tfrac{\rho}{x^{1/2}} \int\limits_{h^2}^{\infty} \tfrac{1}{\tau^{3/2}} d\tau \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha .$$

Thus we have

$$|i_4| \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha . \tag{3.25}$$

The integrals i_1, i_2 are estimated in a similar manner. We consider i_1 only. We have the representation

$$i_1 = \int\limits_0^{h^2} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{|y-\eta|\le 2\rho} xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau)] d\eta$$
$$+ \int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{|y-\eta|\le 2\rho} xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau)] d\eta = i_1^{(1)} + i_1^{(2)}.$$

Keeping in mind (3.5), we obtain

$$\left| i_1^{(1)} \right| \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \int\limits_0^{h^2} \tau^{\alpha/2-1} d\tau \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha . \tag{3.26}$$

Next we write

$$\begin{gathered} f(\xi,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau) = (f(\xi,\eta,t-\tau) - f(x,\eta,t-\tau)) \\ +(f(x,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau)) \end{gathered} \tag{3.27}$$

and use the estimates

$$\begin{gathered} |f(\xi,\eta,t-\tau) - f(x,\eta,t-\tau)| \le \langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} |\sqrt{\xi} - \sqrt{x}|^\alpha = \langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} |u-v|^\alpha \tau^{\alpha/2}, \\ |f(x,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau)| \le \langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} |y-\eta|^{\alpha/2} = \langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left|\tfrac{y-\eta}{\tau}\right|^{\alpha/2} \tau^{\alpha/2}, \\ |f(x,\eta,t-\tau) - f(x,y,t-\tau)| \le \langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left|\tfrac{y-\eta}{\sqrt{x}}\right|^{\alpha} = \langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left|\tfrac{y-\eta}{\tau v}\right|^{\alpha} \tau^{\alpha/2}. \end{gathered} \tag{3.28}$$

In accordance with (3.27), (3.28) we estimate $i_1^{(2)}$ as follows:

$$\left|i_1^{(2)}\right| \leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(2\alpha)}(\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} d\xi \int\limits_{|y-\eta|\leq 2\rho} |xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)||u-v|^{\alpha}\tau^{\alpha/2}d\eta$$

$$+\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{\{z\leq 1\}} d\xi \int\limits_{|y-\eta|\leq 2\rho} |xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)| \left|\tfrac{y-\eta}{\tau}\right|^{\alpha/2}\tau^{\alpha/2}d\eta$$

$$+\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{\{z>1\}} d\xi \int\limits_{|y-\eta|\leq 2\rho} |xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau)| \left|\tfrac{y-\eta}{\tau v}\right|^{\alpha}\tau^{\alpha/2}d\eta)$$

$$= c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}(i_1^{(2.1)}+i_1^{(2.2)}+i_1^{(2.3)}).$$

We will use the estimate (2.32) for all these integrals. In $i_1^{(2.1)}$ we apply inequality

$$\int\limits_{|y-\eta|\leq 2\rho} \frac{d\eta}{1+\left(\frac{y-\eta}{\tau}\right)^2} \leq 2\rho$$

for $\{z\leq 1\}$ and (3.24) for $\{z>1\}$.

Thus we obtain

$$|i_1^{(2.1)}| \leq c\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} \tfrac{xu^{1-2q}}{\tau^3}\exp(-\gamma(u-v)^2)|u-v|^{\alpha}\rho\tau^{\alpha/2}\{\begin{matrix}1\\ z^{q-2}\end{matrix}\}du$$
$$\leq c\tfrac{\rho}{x^{1/2}}(\int\limits_{h^2}^{\infty}\tau^{\alpha/2-3}x^{3/2}\exp(-\gamma_{\alpha}v^2)d\tau+\int\limits_{h^2}^{\infty}\tfrac{\tau^{\alpha/2-3}x^{3/2}}{v^3}d\tau)$$
$$\leq c\tfrac{\rho}{x^{1/2}}\int\limits_{h^2}^{\infty}\tau^{(\alpha-3)/2}d\tau \leq ch^{\alpha}.$$

Since

$$\int\limits_{|y-\eta|\leq 2\rho} \tfrac{\left|\frac{y-\eta}{\tau}\right|^{\alpha/2}\tau^{\alpha/2}}{1+\left(\frac{y-\eta}{\tau}\right)^2}d\eta$$
$$= \int\limits_{|\zeta|\leq 2\rho/\tau} \tfrac{|\zeta|^{\alpha/2}\tau^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1+\zeta^2}d\zeta \leq c\tau^{1+\frac{\alpha}{2}}\int\limits_{|\zeta|\leq 2\rho/\tau}|\zeta|^{\alpha-1}d\zeta \leq c\tau^{1+\frac{\alpha}{2}}\left(\tfrac{\rho}{\tau}\right)^{\alpha+1},$$

we have

$$i_1^{(2.2)} \leq c\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{0}^{1/2v} \tfrac{x}{\tau^2}\tau^{\alpha/2}\left(\tfrac{\rho}{\tau}\right)^{\alpha}u^{1-2q}\exp(-\gamma(u-v)^2)du \leq$$
$$\leq c\left(\tfrac{\rho}{\sqrt{x}}\right)^{\alpha}\int\limits_{h^2}^{\infty}\tfrac{x^{1+\alpha/2}}{\tau^{2+\alpha/2}}\exp(-\gamma v^2)d\tau \leq c\left(\tfrac{\rho}{\sqrt{x}}\right)^{\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}v^{1+\alpha}\exp(-\gamma v^2)dv \leq ch^{\alpha}.$$

In order to estimate $i_1^{(2.3)}$ we use the following inequality

$$\int\limits_{|\zeta|\leq 2\rho} \frac{(\frac{|\zeta|}{\tau\, z^{1/2}})^\alpha}{z+\left(\frac{|\zeta|}{\tau}\right)^2} z^{1/2} d\zeta = \tau^1 \int\limits_{|\sigma|\leq \frac{2\rho}{\tau\, z^{1/2}}} \frac{|\sigma|^\alpha}{1+\sigma^2} d\sigma \leq c\tau(\frac{\rho}{\tau\, z^{1/2}})^{\alpha+1}$$

so that

$$\begin{aligned} i_1^{(2.3)} &\leq c\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{1/2v}^{\infty} \tfrac{x}{\tau^2 z}\tau^{\alpha/2}\left(\tfrac{\rho}{\tau z^{1/2}}\right)^{\alpha+1}\left(\tfrac{z^{1/2}}{v}\right)^\alpha u^{1-2q} z^{q-1/2}\exp(-\gamma(u-v)^2)du \\ &\leq c\int\limits_{h^2}^{\infty} \tfrac{x}{\tau^2 v^2}\tau^{\alpha/2}\tfrac{\rho^{\alpha+1}}{\tau^{\alpha+1} v^{\alpha+1}} d\tau = c\left(\tfrac{\rho}{\sqrt{x}}\right)^{\alpha+1}\int\limits_{h^2}^{\infty}\tau^{-3/2}d\tau \leq ch^\alpha. \end{aligned}$$

The summation shows that

$$\begin{aligned} |i_1| &\leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha, \\ |i_2| &\leq c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Now we can proceed to the study of the integral i_3 by using the representation

$$\begin{aligned} & xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau) - \overline{x}G_{\overline{y}\overline{y}}(\overline{x},\xi,\overline{y}-\eta,\tau) \\ &\quad = \overline{x}G_{yy}(\overline{x},\xi,y-\eta,\tau) - \overline{x}G_{\overline{y}\overline{y}}(\overline{x},\xi,\overline{y}-\eta,\tau) \\ &\quad + xG_{yy}(x,\xi,y-\eta,\tau) - \overline{x}G_{yy}(\overline{x},\xi,y-\eta,\tau) = \int\limits_{\overline{y}}^{y} \overline{x}G_{\theta\theta\theta}(\overline{x},\xi,\theta-\eta,\tau)d\theta \\ &\quad + \int\limits_{\overline{x}}^{x} G_{\eta\eta}(\lambda,\xi,y-\eta,\tau)d\lambda + \int\limits_{\overline{x}}^{x} \lambda G_{\eta\eta\lambda}(\lambda,\xi,y-\eta,\tau)d\lambda. \end{aligned} \tag{3.30}$$

We estimate i_3 as a sum of integrals I_1, I_2, I_3 that correspond to the terms in the right-hand side (3.30).

First let us consider the integral

$$I_1 = \int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{|y-\eta|>2\rho} d\eta \int\limits_{\overline{y}}^{y} \overline{x}G_{\theta\theta\theta}(\overline{x},\xi,\theta-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\theta. \tag{3.31}$$

We apply (3.4) by considering the difference $f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)$. Remark also that

$$2\rho < |y-\eta| \leq |y-\theta| + |\theta-\eta| \leq |y-\overline{y}| + |\theta-\eta|,\ \theta\in[y,\overline{y}],$$

consequently,

$$\rho = |y-\overline{y}| + |x-\overline{x}| < |\theta-\eta|,\ |\overline{y}-\eta| \le 2|\theta-\eta|.$$

It is easy to see that

$$\begin{gathered}\int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} \left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^{\alpha/2} \frac{d\eta}{1+\left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^3} \le c \int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} \frac{d\eta}{1+\left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^2} \le c\frac{\tau^2}{\rho},\\ \int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} \left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau\sqrt{z}}\right)^{\alpha/2} \frac{z d\eta}{z^{3/2}+\left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^3} \le c \int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} \frac{z^{1/2}d\eta}{z+\left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^2} \le c\frac{\tau^2 z^{1/2}}{\rho}.\end{gathered} \tag{3.32}$$

Applying these estimates and (2.41), we obtain

$$\begin{aligned}\left|I_1^{(1)}\right| &= \left|\int\limits_0^{h^2} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{|y-\eta|>2\rho} d\eta \int\limits_{\overline{y}}^{y} \overline{x} G_{\theta\theta\theta}(\overline{x},\xi,\theta-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau)-f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\theta\right|\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \int\limits_0^{h^2} d\tau \int\limits_{\overline{y}}^{y} \frac{d\theta}{\rho} \int\limits_0^{\infty} \overline{x}\tau^{\frac{\alpha}{2}-2} u^{1-2q} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ z^{q-\frac{3}{2}} \end{array}\right\} \exp(-\gamma(u-v)^2)(|u-v|^{\alpha}+1)du\\ &\qquad \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \int\limits_0^{h^2} \tau^{\alpha/2-1}(v^2\exp(-\gamma_\alpha v^2)+1)d\tau \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^{\alpha}.\end{aligned}$$

Further we get

$$\int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} Y_3(\theta-\eta,z)d\eta \le c\tau.$$

Since

$$\begin{gathered}\int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} \left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^{\alpha/2} \frac{d\eta}{1+\left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^3} \le \tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varsigma|^{\alpha/2}d\zeta}{1+|\zeta|^3} \le c\tau,\\ \int\limits_{|\theta-\eta|>\rho} \left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau\sqrt{z}}\right)^{\alpha/2} \frac{z d\eta}{z^{3/2}+\left(\frac{|\theta-\eta|}{\tau}\right)^3} \le \tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varsigma|^{\alpha}d\zeta}{1+|\zeta|^3} \le c\tau\end{gathered} \tag{3.33}$$

we deduce

$$\begin{aligned}\left|I_1^{(2)}\right| &= \left|\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_{|y-\eta|>2\rho} d\eta \int\limits_{\overline{y}}^{y} \overline{x} G_{\theta\theta\theta}(\overline{x},\xi,\theta-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau)-f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\theta\right|\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{\overline{y}}^{y} \frac{d\theta}{\rho} \int\limits_0^{\infty} \frac{\overline{x}}{\tau^3}\tau^{\alpha/2} u^{1-2q} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ z^{q-2} \end{array}\right\} \exp(-\gamma(u-v)^2)(|u-v|^{\alpha}+1)du\\ &\qquad \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{\overline{y}}^{y} \frac{\tau^{(\alpha-3)/2}}{\overline{x}^{1/2}} v^3 \exp(-\gamma_\alpha v^2)d\theta + \int\limits_{h^2}^{\infty} d\tau \int\limits_{\overline{y}}^{y} \frac{\tau^{(\alpha-3)/2}}{x^{1/2}} d\theta\right)\\ &\qquad \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \frac{|y-\overline{y}|}{\sqrt{\overline{x}}} \int\limits_{h^2}^{\infty} \tau^{(\alpha-3)/2}d\tau \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \frac{\rho}{\overline{x}^{1/2}} h^{\alpha-1} \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^{\alpha}.\end{aligned}$$

As a result we have

$$|I_1| = |I_1^{(1)} + I_1^{(2)}| \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha.$$

There is no principal differences in evaluation I_2 and I_3, therefore we obtain only the estimate for I_2.

The integrand in I_2 depends in particular on λ, η, $\overline{x}$, $\overline{y}$, y. We want to obtain the expression with λ, $y-\eta$ only. First we note that in our case(case b)) $\sqrt{\overline{x}} \ge \frac{\sqrt{x}}{2}$, so that the values x, $\overline{x}$, λ are equivalent ($\lambda \in [\overline{x}, x]$). Further we remember that we integrate over the set $\{|y-\eta| > 2\rho\}$, so that we have

$$|\overline{y}-\eta| < 3|y-\eta|, \ \left|\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}\right| < \frac{|y-\eta|}{2\left|\sqrt{x}+\sqrt{\overline{x}}\right|}, \ \left|\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}\right| < \frac{|y-\eta|^{1/2}}{\sqrt{2}}.$$

Now we obtain $\left(v = (\lambda/\tau)^{1/2}\right)$

$$\begin{aligned}|f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau| &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\overline{x}}\right|^\alpha + |y-\eta|^{\alpha/2}\right)\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\lambda}\right|^\alpha + \left|\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}\right|^\alpha + |y-\eta|^{\alpha/2}\right)\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\lambda}\right|^\alpha + |y-\eta|^{\alpha/2}\right),\end{aligned}$$

so that

$$|f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau| \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \tau^{\alpha/2}\left(|u-v|^\alpha + \left|\frac{y-\eta}{\tau}\right|^{\alpha/2}\right) \ (z \le 1). \tag{3.34}$$

Similarly we deduce

$$\begin{aligned}|f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau| &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\overline{x}}\right|^\alpha + \left|\frac{y-\eta}{\sqrt{\xi}+\sqrt{\overline{x}}}\right|^\alpha\right)\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\lambda}\right|^\alpha + \left|\sqrt{x}-\sqrt{\overline{x}}\right|^\alpha + \left|\frac{y-\eta}{\sqrt{\xi}+\sqrt{\overline{x}}}\right|^\alpha\right)\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \left(\left|\sqrt{\xi}-\sqrt{\lambda}\right|^\alpha + \left|\frac{y-\eta}{\sqrt{x}+\sqrt{\overline{x}}}\right|^\alpha + \left|\frac{y-\eta}{\sqrt{\xi}+\sqrt{\overline{x}}}\right|^\alpha\right),\end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned}&|f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau|\\ &\qquad \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \tau^{\alpha/2}\left(|u-v|^\alpha + \left|\frac{y-\eta}{\tau\sqrt{z}}\right|^\alpha \left(1 + \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha/2}\right)\right) \ (z > 1).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Applying (3.32), (3.34), (3.35), (2.33), we obtain

$$\begin{aligned}\left|I_2^{(1)}\right| &\equiv \left|\int_0^{h^2} d\tau \int_{\overline{x}}^{x} d\lambda \int_0^\infty d\xi \int_{|y-\eta|>2\rho} G_{\eta\eta}(\lambda,\xi,y-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau) - f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\eta\right|\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \int_0^{h^2} d\tau \int_{\overline{x}}^{x} d\lambda \int_0^\infty \frac{u^{1-2q}}{\tau^2}\left\{\frac{1}{z^{q-2}}\right\}\exp(-\gamma(u-v)^2)\frac{\tau^{1+\alpha/2}}{\rho}du\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} \frac{|x-\overline{x}|}{\rho}\int_0^{h^2} \tau^{\alpha/2-1}d\tau \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)} h^\alpha.\end{aligned}$$

In the integral $I_2^{(2)}$ (over $\left(h^2,+\infty\right)$) we tend to the estimate

$$i(h)=\int\limits_{h^2}^{\infty}\tau^{\alpha/2-2}d\tau\int\limits_{\overline{x}}^{x}v^{-1}d\lambda\le\int\limits_{h^2}^{\infty}\tau^{(\alpha-3)/2}d\tau\int\limits_{\overline{x}}^{x}\lambda^{-1/2}d\lambda\le ch^{\alpha-1}|x^{1/2}-\overline{x}^{1/2}|\le ch^{\alpha}.$$

Using (3.33), we deduce

$$\begin{aligned}\left|I_2^{(2)}\right|\equiv&\left|\int\limits_{h^2}^{\infty}d\tau\int\limits_{\overline{x}}^{x}d\lambda\int\limits_{0}^{\infty}d\xi\int\limits_{|y-\eta|>2\rho}G_{\eta\eta}(\lambda,\xi,y-\eta,\tau)[f(\xi,\eta,t-\tau)-f(\overline{x},\overline{y},t-\tau)]d\eta\right|\\ &\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}\int\limits_{h^2}^{\infty}d\tau\int\limits_{\overline{x}}^{x}d\lambda\int\limits_{0}^{\infty}\tfrac{u^{1-2q}}{\tau^2}\{\ \tfrac{1}{z^{q-3/2}}\ \}\exp(-\gamma(u-v)^2)\tau^{\alpha/2}du\\ \le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}&\int\limits_{h^2}^{\infty}d\tau\int\limits_{\overline{x}}^{x}\left(\tau^{\alpha/2-2}\left(\exp(-\gamma v^2)+v^{-1}\right)\right)d\lambda\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}\ i(h)\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^{\alpha}.\end{aligned}$$

Thus we can conclude ($I_2=I_2^{(1)}+I_2^{(2)}$)

$$|I_2|+|I_3|\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}h^{\alpha}$$

and the proof of Lemma 3.5 is finished. □

Now the estimates (3.21), (3.22) and Proposition 1.2.A lead to the estimate

$$\langle xu_{yy}^{(2)}\rangle_{x,y,D_T}^{(\alpha)}\le c\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}. \tag{3.36}$$

From (3.7), (3.20), (3.36) we conclude that the estimate

$$\left\langle\left\langle xu_{yy}^{(2)}\right\rangle\right\rangle_{D_T}^{(\alpha)}\le c\left(\langle\langle f\rangle\rangle_{D_T}^{(\alpha)}+\langle u_0\rangle_D^{(2+\alpha)}\right)$$

holds.

In a similar way we prove the estimate (3.2). We remark in addition that we derive the estimates of xu_{xx}, xu_{xy} by using Proposition 1.2.A and the estimates of u_t, u_x, u_y by using Proposition 1.2.B.

Thus we state

Theorem 3.1. *There exists a unique solution of the problem (0.8) and the estimate (3.2) is fulfilled.*

4. A linear problem.

In this section we consider the case of an arbitrary dimension $n\ge 2$ ($x=(x_1,..,x_n)$). Let

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u=\frac{\partial u}{\partial t}-P\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

where

$$P\left(x,t,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u=x_n\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}+a_0(x,t)u;$$

$$\mu\left|\xi\right|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\nu\left|\xi\right|^2,\quad(x,t)\in\Omega_T^*,\ \ \xi\in R^n;\ \ \mu>0;\tag{4.1}$$

$$a_n(x,t)\ge\delta>0,\ \ (x,t)\in\Gamma_T^*,\ a_{ij},a_i,a_0\in C_s^\alpha(\overline{\Omega_T^*}).\tag{4.2}$$

Consider the following problem

$$\begin{gathered}L\left(x,t,\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial t}\right)u=f(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega_T^*,\\ u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in\Omega^*,\\ u(x,t)=\psi(x',t),\ (x,t)\in\Sigma_T^*.\end{gathered}\tag{4.3}$$

We say that the consistency conditions of the first order are fulfilled if

$$\begin{gathered}\psi(x',0)=u_0(x),\ x\in\Sigma^*,\\ \psi_t(x',0)=P\left(x,0,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u_0+f(x,0),\ x\in\Sigma^*.\end{gathered}\tag{4.4}$$

The main result of this section is

Theorem 4.1. *Let (4.1), (4.2), (4.4) are fulfilled. Then for any $f\in C_s^\alpha(\overline{\Omega_T^*})$, $\psi\in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma_T^*})$, $u_0\in C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega^*})$ the problem (4.3) has a unique solution $u\in C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$ and the estimate*

$$|u|_{C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})}\le C\left(|f|_{C_s^\alpha(\overline{\Omega_T^*})}+|u_0|_{C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega^*})}+|\psi|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma_T^*})}\right)\tag{4.5}$$

holds, with a constant C depended on μ,ν, corresponding norms of the coefficients a_{ij}, a_i, a_0 and bounded as T tends to zero.

First of all it should be emphasized that we can reduce the problem (4.3) to the problem with $u_0=0$, $f\in C_{s,0}^\alpha(\overline{\Omega_T^*})$, $\psi\in \underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma_T^*})$. In other words we can construct a function $\theta\in C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$, such that

$$\theta(x,0)=\theta_0(x),\ \theta_t(x,0)=\theta_1(x),\ x\in\Omega^*\tag{4.6}$$

for any $\theta_0\in C_s^{2+\alpha}(\overline{\Omega^*})$, $\theta_1\in C_s^\alpha(\overline{\Omega^*})$.

Indeeed, first we continue the functions θ_0, θ_1 from Ω^* to D with preserving of corresponding classes of function. Further we fix an arbitrary positive number b and introduce operator $L_b = \frac{\partial}{\partial t} - P_b$, where $P_b = x_n \Delta + b\frac{\partial}{\partial x_n}$. We denote $w = \theta_1 - P_b\theta_0$ and continue the function w with respect to the time variable on the interval $[-T, T]$ so that $w(x, -T) = 0$ (for example, by multiplying $w(x)$ on $\eta(t) \in C^\infty([-T, T])$, where $\eta(-T) = 0$, $\eta(t) = 1$, $t \in [0, T]$). We denote $\widetilde{w}(x, t) = w(x, t - T)$. Now we have $\widetilde{w} \in C^\alpha_{s,0}(\overline{D_{2T}})$ and consider the problem

$$\widetilde{z}_t - P_b\widetilde{z} = \widetilde{w},\ (x, t) \in D_{2T},\ \widetilde{z} \in C^{2+\alpha}_{s,0}(\overline{D_{2T}}). \tag{4.7}$$

In section 3 we established that the problem (4.7) has a unique solution $\widetilde{z}$. We introduce the function $z(x, t) = \widetilde{z}(x, t + T)$ and consider the problem

$$v_t - P_b v = 0,\ (x, t) \in D_T,$$

$$v(x, 0) = \theta_0 - z(x, 0),\ x \in D.$$

This problem has a unique solution in view of Theorem 3.1. Now it is easy to check that the function $\theta = v + z$ satisfies the conditions (4.6) and the estimate

$$|\theta|^{(2+\alpha)}_{D_T} \le C\left(|\theta_0|^{(2+\alpha)}_D + |\theta_1|^{(\alpha)}_D\right). \tag{4.8}$$

We set $\theta_0 = u_0$, $\theta_1 = P\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_0 + f(x, 0)$ and for the difference $u - \theta$ we obtain the problem of the form (4.3) with $u_0 = 0$, $f \in C^\alpha_{s,0}(\overline{\Omega^*_T})$, $\psi \in \underset{0}{H}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Sigma^*_T})$ in view of the conditions (4.4).

The proof of Theorem 4.1 is based on the method of "regularizer" (see [6, Ch.4]).

We put $H = C^\alpha_{s,0}(\overline{\Omega^*_T}) \times \underset{0}{H}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Sigma^*_T})$, this is the Banach space of pairs functions $h = (f, \psi)$ and the norm in H is defined by the formula

$$|h|_H = |f|_{C^\alpha_s(\overline{\Omega^*_T})} + |\psi|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma^*_T})}.$$

We write down the problem (4.3) in the form

$$Au = h,\ A : C^{2+\alpha}_{s,0}(\overline{\Omega^*_T}) \to H$$

and construct the regularizing operator $R : H \to C^{2+\alpha}_s(\overline{\Omega^*_T})$ in such a way that

$$ARh = h + Th, \quad RAu = u + Wu,$$

and the norms of the operators $T : H \to H$, $W : C^{2+\alpha}_s(\overline{\Omega^*_\tau}) \to C^{2+\alpha}_s(\overline{\Omega^*_\tau})$ are small for sufficiently small τ, i.e.

$$||T|| < 1,\ ||W|| < 1. \tag{4.9}$$

This implies the existence of the bounded inverse operator A^{-1} for the bounded operator A.

We cover the domain Ω^* by the balls $B_\lambda^{(k)}$, $B_{2\lambda}^{(k)}$ of the diameter λ and 2λ respectively with common centers $\xi^{(k)}$.

In view of (4.1) we see that there exists a sufficiently small parameter ε such that

$$a_n(x,t) \geq \frac{\delta}{2}, \;\; x_n \in [0,\varepsilon]\,, \; (x',t) \in R^{n-1} \times [0,\tau]\,. \tag{4.10}$$

Denote by N_d the set of indices k such that $B_{2\lambda}^{(k)} \cap \{x_n \in [0,\varepsilon]\} \neq \emptyset$, and by N_i the set of rest indices. We introduce the functions $\zeta^{(k)}(x)$, $\eta^{(k)}(x)$, satisfying the conditions (see [6])

$$\begin{gathered} \left|D_x^l \zeta^{(k)}\right| \leq c\lambda^{-|l|}; \; \left|D_x^l \eta^{(k)}\right| \leq c\lambda^{-|l|}, \;\; 1 \leq \sum_k \zeta^{(k)}(x) \leq N_0; \\ \zeta^{(k)}(x) = 1, \;\; x \in B_\lambda^{(k)}; \quad \zeta^{(k)}(x) = 0, \;\; x \in \Omega^* \backslash B_{2\lambda}^{(k)}; \\ \eta^{(k)}(x) = \frac{\zeta^{(k)}(x)}{\sum\limits_k \zeta^{(k)}(x)}; \;\; \sum_k \eta^{(k)}(x)\zeta^{(k)}(x) = 1, \;\; x \in \Omega^*, \end{gathered} \tag{4.11}$$

where N_0 is certain integer depended on n.

We denote $\Omega^{(k)} = B_{2\lambda}^{(k)} \cap \Omega^*$, $\Omega_\tau^{(k)} = \Omega^{(k)} \times (0,\tau)$ and let

$$\tau = \kappa\lambda^2, \;\; \kappa < 1. \tag{4.12}$$

Next we introduce the norms

$$\begin{gathered} \{u\}_{\Omega_\tau^*}^{(2+\alpha)} = \sup_k \langle\langle u\rangle\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(2+\alpha)}\,, \\ \{f\}_{\Omega_\tau^*}^{(\alpha)} = \sup_k \langle\langle f\rangle\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\,. \end{gathered}$$

Arguing as in [6, Ch.4, Lemma 4.2], one can show that if the assumption (4.12) is fulfilled then for some positive constants c_1, c_2

$$\begin{gathered} c_1\,|u|_{\Omega_\tau^*}^{(2+\alpha)} \leq \{u\}_{\Omega_\tau^*}^{(2+\alpha)} \leq c_2\,|u|_{\Omega_\tau^*}^{(2+\alpha)}\,, \\ c_1\,|f|_{\Omega_\tau^*}^{(\alpha)} \leq \{f\}_{\Omega_\tau^*}^{(\alpha)} \leq c_2\,|f|_{\Omega_\tau^*}^{(\alpha)} \end{gathered} \tag{4.13}$$

in the spaces $C_{s,0}^{2+\alpha}$ and $C_{s,0}^{\alpha}$.

Introduce the following operators

$$\begin{aligned} L_d^{(k)}u &= \tfrac{\partial u}{\partial t} - x_n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi^{(k)},0)\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(\xi^{(k)},0)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \\ L_i^{(k)}u &= \tfrac{\partial u}{\partial t} - \xi_n^{(k)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi^{(k)},0)\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(\xi^{(k)},0)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

If $k \in N_d$, the operator $R^{(k)}$ takes the function $f^{(k)}(x,t) \in C^{\alpha}_{s,0}(\overline{D_\tau})$ to a solution of the problem

$$L_d^{(k)} u = f^{(k)}(x,t), (x,t) \in D_\tau,\ u \in C^{2+\alpha}_{s,0}(\overline{D_\tau}). \tag{4.14}$$

If $k \in N_i$ the operator $R^{(k)}$ takes the functions $h^{(k)} = \left(f^{(k)}, \psi^{(k)}\right),\ f^{(k)} \in C^{\alpha}_{s}(\overline{\Omega^*_\tau})$, $\psi^{(k)} \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma^*_\tau})$ to a solution of the problem

$$\begin{gathered} L_i^{(k)} u = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega^*_\tau; \\ u(x,t) = \psi^{(k)}(x',t),\ (x,t) \in \Sigma^*_\tau; \\ u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Gamma^*_\tau; \\ u^{(k)}(x,0) = 0,\ \ x \in \Omega^*. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Now we can construct the operator $R:$

$$Rh = \sum_k \eta^{(k)} u^{(k)}, \tag{4.16}$$

where

$$u^{(k)} = \begin{cases} R^{(k)}\left(\zeta^{(k)} f\right),\ k = N_d, \\ R^{(k)}\left(\zeta^{(k)} f,\ \zeta^{(k)} \varphi\right),\ k = N_i. \end{cases} \tag{4.17}$$

In the problem (4.14) we can transform the operator $L_d^{(k)}$ in the operator $\widetilde{L}_d^{(k)} = \frac{\partial}{\partial t} - x_n \Delta - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ with $b_n > 0$ by the suitable transform of spatial variables. Then we take $y_i = x_i - b_i t$ $(i = 1,..,n-1)$ and pass from $\widetilde{L}_d^{(k)}$ to the operator L_{b_n} (see (0.8)). Next we can apply Theorem 3.1, concerning with the solvability of the model problem (0.8). Finally, returning to original variables x, we conclude that the problem (4.14) has a unique solution $u^{(k)} \in C^{2+\alpha}_{s,0}(\overline{D_\tau})$ and the estimate

$$\left|u^{(k)}\right|^{(2+\alpha)}_{D_\tau} \le c \left|f^{(k)}\right|^{(\alpha)}_{D_\tau},\ k \in N_d \tag{4.18}$$

holds with c depended on μ, ν and $\max\limits_i \sup\limits_{\Omega^*_\tau} |a_i|$.

By using the following inequality

$$\begin{aligned} &\tfrac{|g(x,t)-g(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^\alpha} \le \tfrac{|g(x,t)-g(\overline{x},t)|}{\overline{s}^\alpha[x,\overline{x}]} \tfrac{1}{\left(\sqrt{x_n}+\sqrt{\overline{x}_n}+\sqrt{|x'-\overline{x}'|}\right)^\alpha} \\ &\le \tfrac{c}{\left(2\sqrt{\varepsilon}\right)^\alpha} \tfrac{|g(x,t)-g(\overline{x},t)|}{\overline{s}^\alpha[x,\overline{x}]},\ x, \overline{x} \in \Omega^{(k)}, \forall k \in N_i, \end{aligned}$$

we can obtain that $f^{(k)} = f\varsigma^{(k)} \in C^{\alpha}_{s,0}(\overline{\Omega^*_\tau})$ belongs also to the standard Hölder space $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega^*_\tau})$. Besides, it is worth observing that the operator $L_i^{(k)}$ in (4.15) is nondegenerate, since $\xi_N^{(k)} \geq \varepsilon$ when $k \in N_i$. So that the existence of a solution $u^{(k)} \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega^*_\tau})$to the problem (4.15) can be established by the classical methods. With the help of the inequalities

$$\frac{|g(x,t)-g(\overline{x},t)|}{\overline{s}^{\alpha}[x,\overline{x}]} \leq c\frac{|g(x,t)-g(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^{\alpha}}\left(\sqrt{x_n}+\sqrt{\overline{x}_n}+\sqrt{|x'-\overline{x}'|}\right)^{\alpha}$$

$$\leq c\left(2\sqrt{p_*}+\sqrt{\lambda}\right)^{\alpha}\frac{|g(x,t)-g(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^{\alpha}},\ x,\overline{x}\in\Omega^{(k)}\,(x_n\leq p^*),\ \forall k\in N_i\cup N_d,$$

we deduce that the estimate

$$\left|u^{(k)}\right|_{C_s^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega_\tau^{(k)}}\right)} \leq c\left|u^{(k)}\right|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega_\tau^{(k)}}\right)},\ k\in N_i$$

holds. Thus we have

$$\left|u^{(k)}\right|_{C_s^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega_\tau^{(k)}}\right)} \leq c\left(\left|f^{(k)}\right|_{C_s^{\alpha}\left(\overline{\Omega^*_\tau}\right)}+\left|\psi^{(k)}\right|_{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega^*_\tau})}\right),\ k\in N_i. \tag{4.19}$$

Now the proof of (4.9) can be carried out as in [6, Ch.4, Theorem 7.2] with the help of (4.11), (4.13), (4.18), (4.19).

Then we partition the interval $[0,T]$ into small intervals $[\tau k,\tau(k+1)]$ $(k=0,1,..,[\frac{T}{\tau}])$ with parameter τ from (4.9) and arrive at the assertion of the Theorem 4.1, applying (4.6), (4.8), (4.9) on each interval $[\tau k,\tau(k+1)]$.

Further we formulate the theorem concerning with improving the smoothness of the solution of the problem (4.3).

Assume

$$a_{ij},a_i,a_0\in C_s^{k,\alpha}(\overline{\Omega^*_T}),i,j=1,..,n. \tag{4.20}$$

and denote

$$u^{(k)}(x)=\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}|_{t=0}.$$

We have

$$u^{(0)}(x)=u(x,0),\ u^{(1)}(x)=P(x,0,\tfrac{\partial}{\partial x})u_0+f(x,0) \tag{4.21}$$

and evaluate the rest of $u^{(k)}$ from the reccurent correlations

$$u^{(k+1)}(x)=\sum_{j=0}^{k}\tbinom{k}{j}P^{(j)}(x,0,\tfrac{\partial}{\partial x})u^{(k-j)}(x)+f^{(k)}(x), \tag{4.22}$$

here $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$, $P^{(j)}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ is the operator, that is obtained from $P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ by differentiating of its coefficients j times with respect to t.

We say that the consistency conditions of the order $k+1$ are fulfilled if

$$\psi^{(l)}(x') = u^{(l)}(x),\ x \in \Sigma^*,\ l = 0,..,k+1. \tag{4.23}$$

Theorem 4.2 *Let (4.1), (4.2), (4.20), (4.23) are fulfilled. Then for any* $f \in C_s^{k,\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$, $u_0 \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega^*})$, $\psi \in H^{k+2+\alpha,\frac{k+2+\alpha}{2}}(\overline{\Sigma_T^*})$, $(k = 0,1,..)$ *the problem (4.3) has a unique solution* $u \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$.

5. Conclusion

First of all we have to explain the passage from the problem (0.9) to the problem (1.4). It is clear from (0.10), (0.11) that if $p_0 \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega})$, then $u_0 \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega^*})$ and

$$\frac{1}{|u_{0\,x_n}|} \le \frac{1}{\delta},\ x \in \overline{\Omega^*}. \tag{5.1}$$

It should be noted that the boundary condition on Γ_T^* in (1.4) is satisfied "automatically" in view of Proposition 1.1 and the equation in (1.4), since we seek the solution of (1.4) in the space $C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$ $(k \ge 0)$. We recall also that the function $y_n = u(0,y',t)$ mark out the free boundary Γ_T, so that if $u \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$ then the surface Γ_T belongs to the class $C^{k+1+\alpha/2}$ with respect to variables $t,\ y_i\ (i = 1,..,n-1)$. Thus the proof of Theorem 0.1 is reduced to the investigation of solvability of the problem (1.4). Here we need to construct the function $w \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*})$ such that

$$\frac{\partial^l w}{\partial\, t^l}|_{t=0} = u^{(l)}(x) \equiv \frac{\partial^l u}{\partial\, t^l}|_{t=0},\ x \in \Omega^*,\ l = 0,..,k+1.$$

The functions $u^{(l)}$ can be calculated from the reccurent correlations similar to (4.21), (4.22). The way of construction of the function w is a modification of Theorem 4.3 in [6, Ch.4] with changing of the Laplace operator on the operator L_b with some positive parameter b (see the proof of (4.6) in the case $k = 0$). We choose T to be sufficiently small, so that

$$\frac{1}{|w_{x_n}|} \le \frac{2}{\delta},\ (x,t) \in \overline{\Omega_T^*}.$$

It is possible in view of (5.1).

Now let us define the operator

$$\overline{M} : C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*}) \to C_s^{k,\alpha}(\overline{\Omega_T^*}) \times C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega^*}) \times H^{k+2+\alpha,\frac{k+1+\alpha}{2}}(\overline{\Sigma_T^*})$$

by

$$\overline{M}\widetilde{w} = \left(M\widetilde{w}, \widetilde{w}|_{t=0}, \widetilde{w}|_{\Sigma_T^*}\right), \ \widetilde{w} \in C_s^{k,2+\alpha}(\overline{\Omega_T^*}).$$

The linearization of the operator M at the point w leads to the operator $DM(w)$ such that

$$DM(w)\widetilde{w} = \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} - mx_n \left[\frac{1+|\nabla' w|^2}{(w_{x_n})^2}\widetilde{w}_{x_n x_n} - \frac{m}{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} w_{x_i}\widetilde{w}_{x_n x_i} + \Delta'\widetilde{w}\right]$$

$$+\left(\frac{2mx_n w_{x_n x_n}}{w_{x_n}}\left(1+|\nabla' w|^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n-1} w_{x_i} x_n w_{x_n x_i} - \frac{m}{m-1}\left(1+|\nabla' w|^2\right)\right)\frac{\widetilde{w}_{x_n}}{(w_{x_n})^2}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{2mw_{x_i} x_n w_{x_n x_n}}{(w_{x_n})^2} - \frac{2mw_{x_i}}{(m-1)w_{x_n}}\right)\widetilde{w}_{x_i}.$$

Further we establish the correctness of the problem (1.4) almost literally repeating the reasonings of Theorem II.2.1 from [5]. The cited theorem is based on the implicit function theorem and the crucial role plays the invertibility of the operator $D\overline{M}(w)$ such that $D\overline{M}(w)\widetilde{w} = \left(DM(w)\widetilde{w}, \widetilde{w}|_{t=0}, \widetilde{w}|_{\Sigma_T^*}\right)$, that is the direct consequence of Theorem 4.2.

This work was partially supported by INTAS (grant No:00136) and by the project 01.07/00130 DFFD of Ukraine.

References

[1] *Kalashnikov A.S. Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second order parabolic equations, Uspekhi mat.nauk. – 1987.– v. 42. – n.2.– p. 135–176; English transl., Russian Math. Surveys. – 1987. – n. 2. – p. 169–222.*

[2] *Angenent S.B. The porous medium equation in one space dimension, Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – v. 38. – p. 375–403.*

[3] *Caffarelli L.A., Wolanski N.I. $C^{1+\alpha}$ regularity of the free boundary for the n-dimensional porous media equation, Comm. Pure Appl. Math. – 1990. – v. 43. – p. 885–902.*

[4] *Bazaliy B.V., Krasnoschok N.V. Regularity of the solution of the free boundary problem for the equation $v_t = (v^m)_{xx}$, St.Petersburg Math. J. – 2000. – v. 12. – n. 2. – p. 1–21.*

[5] *Daskalopoulos P., Hamilton R. Regularity of the free boundary for the porous medium equation, Journ. Amer.Math.Soc. – 1998. – v. 11. – p. 899–965*

[6] *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., Providence RI – 1968.*

[7] *Shimakura N. Les fonctions de Green pour certains opérateurs paraboliques dégénérés dans le demiespace, Proc. Japan Acad. – 1971. – v. 47. – p. 699–704.*

[8] *Beitmen H., Erdelyi A. Tables of integral transforms v.1, New York, McGraw-Hill Book Company, 1954.*

[9] *Shilov G.E. Mathematical analysis. Special second course, Moscow, Fizmatgiz, 1965.(in Russian)*

[10] *Riekstyn'sh E.Ya. Asymptotic expansions of integrals v.1, Riga, Zienatne, 1974. (in Russian)*

[11] *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products, 4th ed., revised, "Fizmatgiz", M., 1963; English transl., Academic Press, New York – London, 1965.*

THE TWO-PHASE HELE-SHAW PROBLEM WITH A NONREGULAR INITIAL INTERFACE AND WITHOUT SURFACE TENSION

*J. Mathematical Physics, Analysis, Geometry–2014,–**10**, №1*

1 Introduction

The two-phase Hele-Shaw problem (the Muskat problem) describes the evolution of an interface between two immiscible incompressible fluids (for example, water and oil). The motion of fluids is governed by the Darcy law, stating that the velocities of fluids are proportional to the pressure gradients, and the law of mass conservation [25]. The Muskat problem with a regular initial interface was studied by L. Jiang and Y. Chen [19], F. Yi [30, 31], F. Otto [26], S. Howison [18], D. Ambrose [1], M. Siegel, R. Caflish and S. Howison [28], S.P. Degtyarev [12], J. Escher and B.V. Matioc [14].

Weak and variational solutions for the one-phase Hele-Shaw problem were studied by C. Elliott and J.R. Ockendon [13], E. Di Benedetto and A. Friedman [6]. Y.E. Hohlov and S.Howison [17] constructed explicit solutions to the Hele-Shaw problem. B.V. Bazaliy [4] and J. Escher and G. Simonett [15] proved the existence of classical solutions to the Hele-Shaw problem with the regular initial data. Preliminary arguments show that if the initial interface in the one-phase Hele-Shaw problem has an angle point, then the behaviour of the free boundary depends on the angle value. Moreover, J.R. King, A.A. Lacey, and J.L. Vazquez [20] have found that under certain sufficient conditions the angle value is preserved for some time (the "waiting time" phenomenon). N. Vasylyeva [29] has given a strong proof of the solvability in the weighted Hölder classes to the one-phase Hele-Shaw problem with the "waiting time" property. Similar problem with surface tension was considered by A. Friedman and B.V. Bazaliy [5]. We remark that introduction of the surface tension in one- or two-phase Hele-Shaw problems leads to the regularization of the free boundary problem. The surface tension variation of the Muskat problem was previously studied by us in [7]. In the present paper we apply the same method, but the model problem corresponding to the angle point of the initial interface and the related linear equation turn out to be more complicated. As in [7], our purpose is to formulate a set of sufficient conditions under which the problem has a solution in the weighted Hölder classes with the "waiting time" property.

The paper is organized as follows: In Section 2, we formulate our problem, reduce the problem with unknown boundary to a problem in a fixed domain, define weighted Hölder spaces, and state our main result, Theorem 2.1. After that, in Subsection 2.4, we represent our problem in the form $\Im \mathbf{z} = f(x,t) + \mathsf{F}_1(\mathbf{z})$, where $\mathbf{z} = (\theta_1, \theta_2, \sigma)$ and

$\Im$ is a linear operator, the vector $f(x,t)$ is constructed using the initial data, and F_1 is a nonlinear operator. Section 3 is devoted to investigation of the model problems in the plane corners and in the half spaces. Then, in Section 4, using the technique of the regularizer for parabolic systems [22] together with the results of Section 3, we prove the one-to-one solvability to the linear problem $\Im\mathbf{z} = f(x,t)$, Theorem 4.1. In Section 5, we prove the main results by using Theorem 4.1 and the fixed point theorem.

2 The statement of the problem and the main result

2.1 The mathematical model

Let Ω be a double-connected bounded open domain in R^2 with the boundary $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$ (see Figure 1 below). Let $\Gamma(t)$, for each $t \in [0,T]$, be a simple closed curve $\Gamma(t) \subset \Omega$ that separates Ω into two subdomains $\Omega_1(t)$ and $\Omega_2(t)$ such that $\Omega = \Omega_1(t) \bigcup \Gamma(t) \bigcup \Omega_2(t)$, and $\partial\Omega_i = \Gamma_i \bigcup \Gamma(t)$, $i = 1,2$.

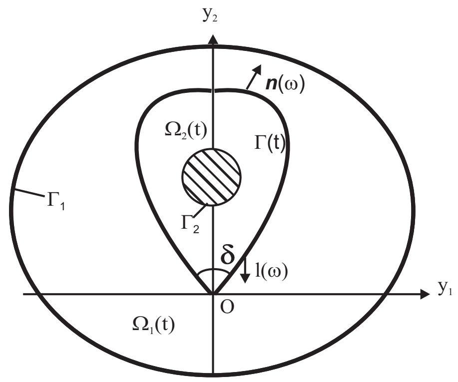


Figure 1: Problem (M)

In the two-phase Hele-Shaw problem we are looking for the fluid domain $\Omega_i(t)$ and the fluid pressure $p_i(y,t)$, $y \in \Omega_i(t)$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2$, such that

$$\Delta_y p_i = 0 \quad in \quad \Omega_i(t),\ i = 1,2,\ t \in [0,T], \tag{2.1}$$

$$p_1 - p_2 = 0 \quad on \quad \Gamma(t), \tag{2.2}$$

$$V_n = -k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = -k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n} \quad on \quad \Gamma(t), \tag{2.3}$$

$$p_i = \psi_i(y) \quad on \quad \Gamma_{iT} = \Gamma_i \times [0,T], \tag{2.4}$$

$$\Omega_i(0), \quad \Gamma(0) \quad are\ given. \tag{2.5}$$

Here $\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$, n is the normal to $\Gamma(t)$ directed in $\Omega_1(t)$, V_n is the velocity of points $\Gamma(t)$ in the direction of n; k_1 and k_2 are positive constants, $k_i = \frac{\bar{k}}{\mu_i}$, where $\bar{k} = const. > 0$

is the permeability of the porous medium and μ_i is the fluid viscosity in $\Omega_i(t)$, $i = 1, 2$, μ_i are positive constants; $\psi_i(y)$ are given positive functions.

If we consider, for example, the physical problem where $\Omega_1(t)$ is occupied by water and $\Omega_2(t)$ is filled by oil, then $\mu_2 > \mu_1$, and hence, $k = \frac{k_2}{k_1} < 1$.

We will suppose that $\Gamma(0)$ has an angle point of opening δ, $\delta \in (0, \pi)$, and the origin of the coordinate system (y_1, y_2) is placed at the vertex of this corner (see Figure 1). For the sake of simplicity, we consider problem (2.1)-(2.5) under the assumption that $\Omega_i(0)$ and $\Gamma(0)$ are symmetric with respect to the y_2- axis, the $\psi_i(y)$ are even functions in y_1, and we seek a symmetric solution with the condition

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_1}|_{y_1=0} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.6}$$

One can see that equation (2.1) and (2.2) together with the second equality in (2.3) define the transition problem with the interface $\Gamma(t)$, and the first equality in (2.3) serves to find the unknown curve $\Gamma(t)$ that is called the free boundary.

We denote the Muscat problem (2.1)-(2.6) as Problem (M).

2.2 Reducing to a fixed domain

As in [5] and [7] we use the Hanzawa method [16] to reduce the free boundary Muskat problem to a problem in a fixed domain. Let $\Omega_i(0) \cap \{y_1 > 0\} = \Omega_i$, $\Gamma = \Gamma(0) \cap \{y_1 \geq 0\}$, $\Gamma \in C^{\varrho+\alpha}$, ϱ is an integer and $\varrho \geq 3$, $\alpha \in (0, 1)$, and ω be some parameter along Γ (for example, the arc length of Γ). The position of a point on Γ we define as $\bar{m}(\omega)$. Let $n(\omega)$ be the normal to Γ directed in Ω_1, and $\bar{l}(\omega)$ be the $C^{\varrho+\alpha}$ ($\varrho \geq 2$) vector field on Γ which is transversal to Γ, such that $\bar{l}(\omega) = (0, -1)$ in the ε_0-neighborhood of $O = (0, 0)$ and $\bar{l}(\omega) = n(\omega)$ out of the $2\varepsilon_0-$neighborhood of O.

For sufficiently small $\gamma_0 > 0$, $\omega-$lines: $\bar{m}(\omega) + \eta\bar{l}(\omega)$, $|\eta| < 2\gamma_0$, do not intersect each other and $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. The mapping $(\omega, \eta) \to y = y(\omega, \eta)$ defined by

$$y = (y_1, y_2) = \bar{m}(\omega) + \eta\bar{l}(\omega)$$

is a diffeomorphism from $M = W \times (-\gamma_0, \gamma_0)$ onto

$$N = \{y : y = \bar{m}(\omega) + \eta\bar{l}(\omega), (\omega, \eta) \in M\}.$$

The inverse mapping $\Sigma : N \to M$ is

$$\Sigma : y \to (\omega(y), \eta(y)).$$

We assume that the free boundary in Problem (M) has the form

$$\Gamma_\rho(t) = \{(y, t) : y(\omega, t) = \bar{m}(\omega) + \rho(\omega, t)\bar{l}(\omega), t \in [0, T]\},$$

where $|\rho(\omega,t)| < \gamma_0/4$, $\rho(\omega,0)=0$. It means that the free boundary equation is given by

$$\Phi_\rho(y,t) = \eta(y) - \rho(\omega,t) = 0, \;\; (y,t) \in N \times [0,T]. \tag{2.7}$$

The surface $\Gamma_\rho(t)$ splits $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ into domains $\Omega_i(t)$. Let $\chi(\lambda) \in C_0^\infty(R^1)$, $\chi(\lambda) = 1$ if $|\lambda| < \gamma_0/3$ and $\chi(\lambda) = 0$ if $|\lambda| > \gamma_0$, $|\chi\prime| \le const./\gamma_0$, $const. < 2$. We shall use the coordinates (ω,η) to define the diffeomorphism

$$e_\rho : (x,t) \to (y,t)$$

from $X_T = R^2 \times [0,T]$ onto $Y_T = R^2 \times [0,T]$ by setting

$$\begin{cases} \omega(y) = \omega(x), \\ \eta(y) = \lambda(x) + \chi(\lambda(x))\rho(\omega(x),t), if \;\; (\omega(x),\lambda(x)) \in N, \\ y = x, \;\; otherwise, \end{cases} \tag{2.8}$$

such that the transform e_ρ^{-1} maps $\Omega_i(t)$ onto $\Omega_i \times [0,T] = \Omega_{iT}$ and $\Gamma_\rho(t)$ onto $\Gamma \times [0,T] = \Gamma_T$, the free boundary is given by $e_\rho(\{\lambda(x)=0\})$, and $\omega(x)$, $\lambda(x)$ are the coordinates in X_T similar to the coordinates $\omega(y)$, $\eta(y)$ in Y_T. The change of variables gives the new desired functions

$$v_i(x_1,x_2,t) = p_i(y,t) \circ e_\rho(x,t), \;\; i = 1,2, \tag{2.9}$$

which satisfy the equations

$$\nabla_\rho^2 v_i(x,t) = 0 \quad in \quad \Omega_{iT}, \tag{2.10}$$

$$v_1(x,t) - v_2(x,t) = 0 \quad on \quad \Gamma_T, \tag{2.11}$$

$$v_i = \psi_i(x) \quad on \quad \Gamma_{iT}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_1} = 0 \quad on \quad x_1 = 0, \tag{2.13}$$

where we take into account that $y = x$ near Γ_{iT}. Here $\nabla_\rho = (E_\rho^*)^{-1}\nabla_x$, where E_ρ is the Jacobi matrix of the mapping $y = e_\rho(x,t)$, $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$. It follows from (2.7) that the unit normal to $\Gamma_\rho(t)$ is

$$n = \frac{\nabla_y \Phi_\rho}{|\nabla_y \Phi_\rho|},$$

and therefore

$$V_n = -\frac{\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial t}}{|\nabla_y \Phi_\rho|} = \frac{\frac{\partial \rho(\omega,t)}{\partial t}}{|\nabla_y \Phi_\rho|}.$$

Now we can conclude that equation (2.3) takes the form

$$\frac{\partial \rho(\omega,t)}{\partial t} = -k_1(\nabla_y p_1, \nabla_y \Phi_\rho) = -k_2(\nabla_y p_2, \nabla_y \Phi_\rho), \tag{2.14}$$

$$\rho(\omega, 0) = 0. \tag{2.15}$$

Since $\Phi_\rho = 0$ on $\Gamma(t)$ we get

$$(\nabla_y p_i, \nabla_y \Phi_\rho) = (\nabla_\rho v_i, \nabla_\rho \Phi_\rho) = S(\omega, \rho, \rho_\omega)\frac{\partial v_i}{\partial \lambda} + S_1(\omega, \rho, \rho_\omega)\frac{\partial v_i}{\partial \omega},$$

where $S(\omega, \rho, \rho_\omega)$, $S_1(\omega, \rho, \rho_\omega)$ are some specific smooth functions

$$S(\omega, \rho, \rho_\omega) = (\nabla_\rho \lambda, \nabla_\rho \lambda), S_1(\omega, \rho, \rho_\omega) = (\nabla_\rho \omega, \nabla_\rho \lambda).$$

Thus our initial free boundary Muskat problem is reduced to the problem in the fixed domain for functions $v_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$, and $\rho(\omega, t)$ that satisfy equations (2.10)-(2.15). We denote this problem as (M_1):

$$\nabla_\rho^2 v_i(x, t) = 0 \quad in \quad \Omega_{iT},\ i = 1, 2,$$

$$v_1(x, t) - v_2(x, t) = 0 \quad on \quad \Gamma_T,$$

$$-\rho_t(\omega, t) = k_1(\nabla_\rho v_1, \nabla_\rho \Phi_\rho) = k_2(\nabla_\rho v_2, \nabla_\rho \Phi_\rho) \quad on\ \Gamma_T,$$

$$v_i = \psi_i(x) \quad on \quad \Gamma_{iT}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \quad \rho(\omega, 0) = 0. \tag{2.16}$$

2.3 Weighted Hölder spaces and the main result.

Let D be a given domain in R^2 with a corner point at the origin of coordinates and let $D_T = D \times [0, T]$. Denote the distance from the origin of coordinates to the point $y \in \bar{D}$ by $r(y)$. We set $r(y, x) = \min\{r(y), r(x)\}$, $x, y \in \bar{D}$. Let s be a certain given number, ϱ be an integer, $\varrho \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$. The Banach space $E_s^{\varrho+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{D}_T)$ is the set of functions $u(x, t)$ with the finite norm

$$\|u\|_{E_s^{\varrho+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{D}_T)} = \sum_{|l|=0}^{\varrho} [\sup_{\bar{D}_T} r^{|l|-s}(x)|D_x^l u(x, t)| + \langle D_x^l u(x, t)\rangle_{x,s-|l|,D_T}^{(\alpha)}$$

$$+\langle D_x^l u(x, t)\rangle_{t,s-|l|,D_T}^{(\alpha)} + [D_x^l u(x, t)]_{s-|l|,D_T}^{(\alpha,\alpha)}],$$

where

$$\langle u\rangle_{x,s,D_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(\bar{x}, t), (x, t) \in \bar{D}_T,\\ |x - \bar{x}| < r(x, \bar{x})/2}} r^{\alpha-s}(x, \bar{x})\frac{|u(\bar{x}, t) - u(x, t)|}{|x - \bar{x}|^\alpha},$$

$$\langle u\rangle_{t,s,D_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in \bar{D}_T} r^{-s}(x)\frac{|u(x, t) - u(x, \tau)|}{|t - \tau|^\alpha},$$

and

$$[u]^{(\alpha,\alpha)}_{s,D_T} = \sup_{\substack{\bar{x}, x \in \bar{D}, t, \tau \in [0,T], \\ |x-\bar{x}| < r(x,\bar{x})/2}} r^{\alpha - s}(x,\bar{x}) \frac{|u(\bar{x},t) - u(x,t) - u(\bar{x},\tau) + u(x,\tau)|}{|\bar{x}-x|^\alpha |t-\tau|^\alpha}.$$

In a similar way we introduce the space $E^{\varrho+\alpha,\alpha,\alpha}_s(\overline{\partial D}_T)$. For functions $u(x)$ independent of t we use the space $E^{\varrho+\alpha}_s(\bar{D})$ with the finite norm

$$\|u\|_{E^{\varrho+\alpha}_s(\bar{D})} = \sum_{|l|=0}^{\varrho} [\sup_{\bar{D}} r^{|l|-s}(x)|D^l_x u(x)| + \langle D^l_x u(x)\rangle^{(\alpha)}_{x,s-|l|,D}],$$

where

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,s,D} = \sup_{\substack{\bar{x}, x \in \bar{D}, \\ |x-\bar{x}| < r(x,\bar{x})/2}} r^{\alpha - s}(x,\bar{x}) \frac{|u(\bar{x}) - u(x)|}{|x-\bar{x}|^\alpha}.$$

If the domain D does not contain a corner point, the definition of the space $E^{\varrho+\alpha,\alpha,\alpha}_s(\bar{D}_T)$ remains as before with $r(x) \equiv 1$. In this case we use the notation $E^{\varrho+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{D}_T)$.

For functions $f(\omega,t)$ defined on Γ_T we will use the weighted Hölder space $N^{2+\alpha}_{s,\gamma}(\Gamma_T)$ with the norm

$$\|f\|_{N^{2+\alpha}_{s,\gamma}(\Gamma_T)} = \|r^{1+\gamma} f\|_{E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}_s(\bar{\Gamma}_T)} + \|f_t\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)},$$

where γ is some positive number.

We define the functions $v_{i0}(x) = v_i(x,0)$ as a solution of the transmission problem

$$\Delta v_{i0} = 0 \quad in \quad \Omega_i, \; i = 1,2,$$
$$v_{10} - v_{20} = 0, \; k_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial v_{20}}{\partial n} \quad on \; \Gamma,$$
$$v_{i0} = \psi_i(x) \; on \quad \Gamma_i, \; \frac{\partial v_{i0}}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0. \tag{2.17}$$

By Theorem 1.1 and Remark 3.1 from [8], there exists a unique solution $(v_{10}(x), v_{20}(x))$ to problem (2.17), and

$$\|v_{i0}\|_{E^{3+\alpha}_{2+\gamma}(\bar{\Omega}_i)} \le const.(\|\psi_1\|_{E^{3+\alpha}(\bar{\Gamma}_1)} + \|\psi_2\|_{E^{3+\alpha}(\bar{\Gamma}_2)}) \tag{2.18}$$

where $\alpha \in (0,1)$ and

$$\gamma \in (1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{\pi + 3\delta}{2\pi - \delta}) \quad if \quad \delta \in (0, \pi/7);$$
$$\gamma \in (1 + \frac{3\delta}{\pi - \delta}, 1 + \frac{\pi + 3\delta}{2\pi - \delta}) \quad if \quad \delta \in (\pi/7, \pi/4). \tag{2.19}$$

Theorem 2.1 *Let* $k = \frac{k_2}{k_1}$, $\alpha \in (0, 1/2)$, $\psi_i \in C^{3+\alpha}(\bar{\Gamma}_i)$, $i = 1, 2$; Γ *and* $\Gamma_i \in C^{3+\alpha}$ *satisfy the assumptions mentioned in Subsections 2.1 and 2.2; the initial pressures* $(v_{10}(x), v_{20}(x))$ *be given with* (2.17) *and inequality* (2.18) *hold;*

$$0 < k < 1 \quad and \quad \frac{\partial v_{i0}}{\partial n} < 0 \quad on \quad \Gamma,\ i = 1, 2; \tag{2.20}$$

i

$$s \in \left(\max\{2 + 1/2, \tfrac{b_1^*}{\pi - \delta}, \tfrac{a_1^*}{\pi - \delta}\}, \frac{5\pi}{2\pi - \delta} \right) \ if \ \delta \in (0, \pi/5),$$

ii

$$s \in \left(\max\{\tfrac{2\pi}{\pi - \delta}, \tfrac{b_2^*}{\pi - \delta}, \tfrac{a_2^*}{\pi - \delta}\}, \frac{5\pi}{2\pi - \delta} \right) \ if \ \delta \in (\pi/5, \pi/4),$$

where numbers b_j^* *and* a_j^*, $j = 1, 2$, *are some positive constants depended on initial data (more detail definitions of these numbers are represented in Section 3). Then for some* T *there exists a unique solution* $(v_1(x, t), v_2(x, t), \rho(\omega, t))$ *of problem* (2.16) *for* $t \in [0, T]$, *such that* $v_i(x, t) \in E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{iT})$, $i = 1, 2$, $\rho(\omega, t) \in N_{s,\gamma}^{2+\alpha}$.

It should be remarked that condition (2.20) means the more viscous fluid must displace the less viscous fluid, and then the Muskat problem (2.1)-(2.5) without surface tension is well-posed (see [28] and [1]).

Corollary 2.1 *Note that under assumptions of Theorem 2.1 the initial corner point* O *does not move and the geometry of the initial shape of the free boundary near* O *preserves in time. Other words the results of Theorem 2.1 guarantee the existence of the "waiting time" for angle* $\delta \in (0, \pi/4)$ *in the Muskat problem* (2.1)-(2.5) *in the case of zero surface tension.*

2.4 A perturbation form of system (M_1).

In this subsection we linearize system M_1 on the initial data and rewrite one as a system $\Im \mathbf{z} = \mathsf{F}(\mathbf{z})$ where $\Im$ is a linear operator and $\mathsf{F}(\mathbf{z})$ is a nonlinear perturbation.

From (2.14) for $t = 0$ we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\omega, 0) &= -k_1 \left(S(\omega, 0, 0)\frac{\partial v_{10}}{\partial \lambda} + S_1(\omega, 0, 0)\frac{\partial v_{10}}{\partial \omega} \right) \\ &= -k_2 \left(S(\omega, 0, 0)\frac{\partial v_{20}}{\partial \lambda} + S_1(\omega, 0, 0)\frac{\partial v_{20}}{\partial \omega} \right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Let a function $m(\omega, t)$ be such that

$$m(\omega, 0) = 0, \quad \frac{\partial m(\omega, t)}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\omega, 0).$$

As an example of the function $m(\omega,t)$, we can take $m(\omega,t)=t\frac{\partial\rho}{\partial t}(\omega,0)$.

We introduce the new unknown functions in the following way

$$\sigma(\omega,t)=\rho(\omega,t)-m(\omega,t), \tag{2.22}$$

$$\theta_i(x,t)=v_i(x,t)-v_{i0}(x)-(\nabla_x v_{i0}\cdot\bar{e}_\sigma) \tag{2.23}$$

where

$$\bar{e}_\sigma=\frac{\partial x}{\partial\lambda}\chi(\lambda)\sigma(\omega,t),\quad x=(x_1,x_2). \tag{2.24}$$

Now we rewrite system (M_1) in terms of functions $\sigma(\omega,t)$, $\theta_i(x,t)$, $i=1,2$, and after some calculations get the problem in the form:

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_2^2}=F_{0i}(\theta_i,\sigma)\quad in\ \Omega_{iT}, \tag{2.25}$$

$$\theta_1(x,t)-\theta_2(x,t)=\nabla_x v_{10}\cdot\bar{e}_\sigma-\nabla_x v_{20}\cdot\bar{e}_\sigma\equiv\sigma A(x)\quad on\ \Gamma_T, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-k_1\left[a(x)\frac{\partial\theta_1}{\partial n}+a_1(x)\frac{\partial\sigma}{\partial\omega}\right]+F_1(\theta_1,\sigma)\quad on\ \Gamma_T, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n}-k\frac{\partial\theta_2}{\partial n}+a_2(x)\frac{\partial\sigma}{\partial\omega}=F_2(\theta_1,\theta_2,\sigma)\quad on\ \Gamma_T, \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1}|_{x_1=0}=-\frac{\partial(\nabla_x v_{i0}\cdot\bar{e}_\sigma)}{\partial x_1}\equiv F_3(\sigma),\ \theta_i(x,t)=0\quad on\quad\Gamma_{iT}, \tag{2.29}$$

$$\sigma(\omega,0)=\frac{\partial\sigma(\omega,t)}{\partial t}|_{t=0}=0,\quad\theta_i(x,0)=0. \tag{2.30}$$

The properties of the functions $A(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ F_{0i}, $i=1,2$, F_1, F_2 will be described later on.

Remark 2.1 *Note that $F_3(\sigma)\equiv 0$ if we look for the solution in the class of $\sigma\in N^{2+\alpha}_{s,\gamma}$ and take into account definition* (2.24) *of the vector $\bar{e}_\sigma$.*

Let

$$\bar{F}_1(\theta_1,\sigma)=F_1(\theta_1,\sigma)+k_1a_1(x)\frac{A_\omega(x)}{A(x)}\sigma,\ \bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma)=F_2(\theta_1,\theta_2,\sigma)+a_2(x)\frac{A_\omega(x)}{A(x)}\sigma,$$

$$A_1(x)=\frac{a_1(x)}{A(x)},\quad A_2(x)=\frac{a_2(x)}{A(x)},$$

then, we can rewrite conditions (2.27) and (2.28) as

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-k_1a(x)\frac{\partial\theta_1}{\partial n}-k_1a_1(x)\frac{\partial\sigma}{\partial\omega}-k_1\frac{a_1(x)A_\omega(x)}{A(x)}\sigma+\bar{F}_1(\theta_1,\sigma)\quad on\ \Gamma_T, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial\theta_2}{\partial n} + a_2(x)\frac{\partial\sigma}{\partial\omega} + a_2(x)\frac{A_\omega(x)}{A(x)}\sigma = \bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma) \quad on\ \Gamma_T. \tag{2.32}$$

After that we can find the term σ_ω from condition (2.26) and substitute it into (2.31), (2.32). Thus we have got following system (M_2):

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_2^2} = F_{0i}(\theta_i,\sigma) \quad in\ \Omega_{iT},\ i=1,2, \tag{2.33}$$

$$\theta_1(x,t) - \theta_2(x,t) = A(x)\sigma \quad on\ \Gamma_T, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -k_1 a(x)\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k_1 A_1(x)\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\omega} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\omega}\right) + \bar{F}_1(\theta_1,\sigma) \quad on\ \Gamma_T, \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial\theta_2}{\partial n} + A_2(x)\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\omega} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\omega}\right) = \bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma) \quad on\ \Gamma_T, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0,\ \theta_i(x,t) = 0 \quad on \quad \Gamma_{iT}, \tag{2.37}$$

$$\sigma(\omega,0) = \frac{\partial\sigma(\omega,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \theta_i(x,0) = 0. \tag{2.38}$$

Now system (M_2) can be written as

$$\Im\mathbf{z} = \mathsf{F}(\mathbf{z}),\ where\ \mathbf{z} = (\theta_1,\theta_2,\sigma). \tag{2.39}$$

Note that if we froze the functional arguments in the functions $F_{0i}(\theta_i,\sigma)$, $\bar{F}_1(\theta_1,\sigma)$, $\bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma)$, then system (2.39) or (2.33)-(2.38) will be a linear system with variable coefficients, which will be studied in detail in Section 4.

To illustrate system (M_2) we describe one in a vicinity of the angle point $O=(0,0)$ where $\bar{l}(\omega) = (0,-1)$. Let $y_2 = \varphi(y_1)$ with $\varphi'(y_1) > 0$ be the equation of $\Gamma = \Gamma(0)$ in the mentioned above vicinity, where $\varphi(0) = 0$ and $\varphi'(0) = \cot\frac{\delta}{2}$. As a parameter along $\Gamma(0)$ here we take now $\omega(y) = y_1$, and transformation (2.8) takes the form

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - \chi(z)\rho(x_1,t),\ z = x_2 - \varphi(x_1). \tag{2.40}$$

From (2.40) it follows

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = 0,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{1}{1-\chi_z\rho}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\frac{\chi_z\rho\varphi_{x_1} - \chi\rho_{x_1}}{1-\chi_z\rho}, \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_2^2} = \frac{\chi_{zz}\rho}{(1-\chi_z\rho)^3},$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial y_1^2} = \frac{-\chi_{zz}(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1})\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\rho - \chi_z\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \chi_z\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \chi_z(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1})\frac{\partial\rho}{\partial x_1} + \chi\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}}{1-\chi_z\rho}$$

$$-\left[\chi_{zz}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\rho+\chi_z\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right]\frac{\chi_z\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\chi\frac{\partial\rho}{\partial x_1}}{(1-\chi_z\rho)^2}.$$

As before we set

$$p_i(y_1,y_2,t)=p_i(x_1,y_2(x_1,x_2,t),t)=v_i(x_1,x_2,t),$$

and equation (2.1) becomes

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2}\left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2\right]$$

$$+\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\left[\frac{\partial^2 x_2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 x_2}{\partial y_2^2}\right]=0 \quad in \quad \Omega_{iT}. \tag{2.41}$$

The free boundary $\Gamma(t)$ in Problem (M) has the representation near O

$$\Phi_\rho(y,t)=-y_2+\varphi(y_1)-\rho(y_1,t)=0, \tag{2.42}$$

so that

$$\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial t}, \quad n=\frac{\nabla_y\Phi_\rho}{|\nabla_y\Phi_\rho|},$$

and hence

$$V_n=\nabla_y p_i\cdot n=\frac{\rho_t}{|\nabla_y\Phi_\rho|}.$$

On the other hand,

$$\frac{\partial p_i}{\partial n}=\nabla_y p_i\cdot n=\frac{\nabla_y p_i}{|\nabla_y\Phi_\rho|}\nabla_y\Phi_\rho.$$

So boundary condition (2.3), by using the relation $\nabla_y\Phi_\rho=(\varphi_{x_1}-\rho_{x_1},-1)$, takes the form

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-k_i\left[(\varphi_{x_1}-\rho_{x_1})\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}-\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\rho_{x_1}\right)-\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\right],\ i=1,2.$$

Since

$$\frac{\partial v_i}{\partial n}=\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\frac{\varphi_{x_1}}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}-\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}$$

the another form of the previous equation is $(i=1,2)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-k_i\left[\frac{\partial v_i}{\partial n}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}-\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}+(\varphi_{x_1}-\rho_{x_1})\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\right)\right] \ on\ \Gamma_T. \tag{2.43}$$

Boundary conditions (2.2) and (2.4) conserve their form

$$v_1-v_2=0 \quad \Gamma_T, \tag{2.44}$$

$$v_i = \psi_i(x) \quad on \quad \Gamma_{iT}, \tag{2.45}$$

and initial conditions are

$$v_i(x,0) = v_{i0}(x), \quad \rho(x_1,0) = 0. \tag{2.46}$$

So, in this simple case the nonlinear problem is described by equations (2.41), (2.43)-(2.46).

Since $\rho(x_1,0) = 0$ from (2.43) we get

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}|_{t=0} = -k_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial n}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}.$$

Let

$$m(x_1,t) = -tk_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial n}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2} \equiv tm_0(x)$$

and

$$\rho(x_1,t) = \sigma(x_1,t) + m(x_1,t), \tag{2.47}$$

such that

$$\sigma(x_1,0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Introduce the function

$$w_i(x,t) = v_i(x,t) - v_{i0}(x), \quad w_i(x,0) = 0. \tag{2.48}$$

Next we rewrite equations (2.41), (2.43)-(2.46) in the terms of $w_i(x,t)$, $\sigma(x_1,t)$. Equation (2.41) is transformed to

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} + \chi(z)\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} = g_{0i}(w_i,\sigma). \tag{2.49}$$

Below we define the function $g_{0i}(w_i,\sigma)$. The form of the left hand side here suggests one more change of unknown functions

$$\theta_i(x,t) = w_i(x,t) + \chi(z)\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\sigma(x_1,t). \tag{2.50}$$

This step explains the appearance of the last term on the right hand side in equation (2.23).

Finally we have

$$\Delta\theta_i = F_{0i}(\theta_i,\sigma) \; in \; \Omega_{iT}, \; i = 1,2, \tag{2.51}$$

where

$$F_{0i}(\theta_i,\sigma) \equiv g_{0i}(\theta_i,\sigma) - \left(\chi\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\right)_{x_1x_1}\sigma - 2\left(\chi\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\right)_{x_1}\sigma_{x_1} - \left(\chi\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\right)_{x_2x_2}\sigma, \tag{2.52}$$

$$g_{0i}(w_i,\sigma) = -\frac{\partial^2 v_{i0}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2(v_{i0}+w_i)}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 v_{i0}}{\partial x_2^2}\left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2\right]$$

$$-\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2}\left[-1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2\right] - \frac{\partial(v_{i0}+w_i)}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial y_2^2}\right) + \chi\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2}.$$

Remark 2.2 *The function $F_{0i}(\theta_i,\sigma)$ contains the higher derivatives of $\theta_i(x,t)$ and $\sigma(x_1,t)$ with coefficients that tend to zero as $t \to 0$, "quadratic" terms with respect to $\theta_i(x,t)$ and $\sigma(x_1,t)$, and their derivatives, and terms of minor differential orders of unknown functions.*

For example, the factor $\left[-1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2\right]$ tends to zero as $t \to 0$ by the definition of $\frac{\partial x_2}{\partial y_1}$, $\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$, and the equation $\rho(x,0) = 0$. It is easy to check that the coefficient under $\sigma_{x_1 x_1}$ in $F_{0i}(\theta_i,\sigma)$ is

$$\chi(z)\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\left(\frac{1}{1-\chi_z(m+\sigma)} - 1\right) = \frac{\chi(z)\chi_z(m+\sigma)\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}}{1-\chi_z(m+\sigma)}$$

and vanishes as $t \to 0$ due to $(m(x_1,t) + \sigma(x_1,t)) \to 0$ as $t \to 0$.

Since $w_1(x,t) = w_2(x,t)$ and $\chi(z) = 1$ on Γ_T, condition (2.2) takes the form

$$\theta_1(x,t) - \theta_2(x,t) = \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial x_2} - \frac{\partial v_{20}}{\partial x_2}\right)\sigma. \tag{2.53}$$

By simple calculations we transform equation (2.43) into

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -k_i\left[\frac{\partial \theta_i}{\partial n}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_1} + g_i\right], \tag{2.54}$$

where

$$g_i(\theta_i,\sigma) = -\sigma\frac{\partial^2 v_{i0}}{\partial n \partial x_2}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2} + \sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}\frac{\partial v_{i0}}{\partial n} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}\frac{\partial v_{i0}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \frac{\partial m}{\partial x_1}\right)$$

$$\times\left[\frac{\partial^2 v_{i0}}{\partial x_2 \partial x_1}\sigma - \frac{\partial(\theta_i + v_{i0})}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{i0}}{\partial x_2}\sigma_{x_1}\right] - (\varphi_{x_1} - \sigma_{x_1} - m_{x_1})$$

$$\times\left(\frac{\partial(\theta_i + v_{i0})}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 v_{i0}}{\partial x_2^2}\sigma\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \frac{\partial m}{\partial x_1}\right).$$

Remark 2.3 *$g_i(\theta_i,\sigma)$ satisfies to the same properties as $F_{0i}(\theta_i,\sigma)$, i.e. $g_i(\theta_i,\sigma)$ contains minor terms, "quadratic" terms, and higher terms with small coefficients as $t \to 0$.*

In reality, (2.54) contains two conditions. First of them is

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -k_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2} - \frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\frac{\partial v_{10}}{\partial x_1}\right) + F_1(\theta_1,\sigma),\ F_1(\theta_1,\sigma) = -k_1 g_1(\theta_1,\sigma), \quad (2.55)$$

and second one is

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial\theta_2}{\partial n} - \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial x_1} - k\frac{\partial v_{20}}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}(kg_2 - g_1)$$

$$= F_2(\theta_1,\theta_2,\sigma). \quad (2.56)$$

Equations (2.51), (2.53), (2.55), and (2.56) correspond to (2.25)-(2.28) ones.

We will use equalities

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} = \sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial x_2} - \frac{\partial v_{20}}{\partial x_2} = \frac{1-k}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial v_{10}}{\partial n},$$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial x_1} - k\frac{\partial v_{20}}{\partial x_1} = \frac{1-k}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau},$$

where τ is a tangent vector to Γ; and the two last equalities follow from (2.17).

Summing our calculations we get the next problem. It is necessary to find the functions $\theta_i(x,t)$, $i=1,2$, $\sigma(\tau,t)$ by conditions:

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_2^2} = F_{0i}(\theta_i,\sigma)\ in\ \Omega_{iT}, \quad (2.57)$$

$$\theta_1(x,t) - \theta_2(x,t) = \frac{1-k}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial v_{10}}{\partial n}\sigma\ on\ \Gamma_T, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial\theta_2}{\partial n} - \frac{(1-k)}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau} = F_2(\theta_1,\theta_2,\sigma)\ on\ \Gamma_T, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -k_1\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - \frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\frac{\partial v_{10}}{\partial x_1}\right) + F_1(\theta_1,\sigma)\ on\ \Gamma_T, \quad (2.60)$$

$$\theta_i(x,t) = 0\ on\ \Gamma_{iT},\ \frac{\partial\theta_i}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = -\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi[x_2-\varphi_{x_1}]\sigma(\omega,t)\tfrac{\partial v_{i0}}{\partial x_2})\Big|_{x_1=0} \equiv F_3(x,t,\sigma), \quad (2.61)$$

$$\sigma(\tau,0) = 0,\ \frac{\partial\sigma(\tau,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,\ \theta_i(x,0) = 0, \quad (2.62)$$

where the functions $F_{0i}(\theta_i,\sigma)$, $F_1(\theta_1,\sigma)$, $F_2(\theta_1,\theta_2,\sigma)$ are defined in (2.54), (2.55) and (2.56) respectively, and as it follows from Remark 2.1 $F_3(x,t,\sigma)\equiv 0$ for every $(x,t)\in\Gamma_T$.

Our next step is to get rid of $\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}$ at the left hand sides of equations (2.59) and (2.60). To this end we introduce the functions

$$\bar{F}_1(\theta_1,\sigma) = \frac{F_1(\theta_1,\sigma)}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}} - k_1\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial n}(1+\varphi_{x_1}^2)^{-1/2}\right)\left(\varphi_{x_1} + \frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\right)\sigma,$$

$$\bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma) = F_2(\theta_1,\theta_2,\sigma) - (1-k)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial n}(1+\varphi_{x_1}^2)^{-1/2}\right)\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\sigma,$$

then conditions (2.59) and (2.60) can be rewritten as

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial\theta_2}{\partial n} - \frac{(1-k)}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau} - (1-k)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial n}(1+\varphi_{x_1}^2)^{-1/2}\right)\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\sigma$$

$$= \bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma) \ on\ \Gamma_T, \tag{2.63}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -k_1\frac{\partial\theta_1}{\partial n} + k_1\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau} + \frac{\varphi_{x_1}}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial v_{10}}{\partial n}\right)$$

$$+k_1\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial n}(1+\varphi_{x_1}^2)^{-1/2}\right)\left(\varphi_{x_1} + \frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\right)\sigma + \bar{F}_1(\theta_1,\sigma) \ on\ \Gamma_T. \tag{2.64}$$

After that we get from (2.58) the following

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} = \frac{k\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}{(1-k)\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right) - \frac{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial n}(1+\varphi_{x_1}^2)^{-1/2}\right)\sigma.$$

Substituting this expression for $\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}$ into (2.63) and (2.64), we get

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial\theta_2}{\partial n} - k\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right) = \bar{F}_2(\theta_1,\theta_2,\sigma) \ on\ \Gamma_T, \tag{2.65}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -k_1\frac{\partial\theta_1}{\partial n} + \frac{k_2}{1-k}\left(\varphi_{x_1} + \frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\right)\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right) + \bar{F}_1(\theta_1,\sigma) \ on\ \Gamma_T. \tag{2.66}$$

After that we find the term $\frac{k_2}{1-k}\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial\tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right)$ from (2.65) and substitute it into condition (2.66), so we have

$$\frac{1-k}{k_2\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial\theta_1}{\partial n} - \frac{\partial\theta_2}{\partial n} + \varphi_{x_1}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right) + \frac{1-k}{k_2}\bar{F}_1(\theta_1,\sigma) - \frac{\bar{F}_2}{k} \ on\ \Gamma_T.$$

Thus system (2.57)-(2.62) can be represented as

$$\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_2^2} = F_{0i}(\theta_i,\sigma) \ in\ \Omega_{iT}, \tag{2.67}$$

$$\theta_1(x,t) - \theta_2(x,t) = \frac{1-k}{k} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}} \frac{\partial v_{10}}{\partial n} \sigma \ on \ \Gamma_T, \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial \tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right) = \bar{F}_2(\theta_1, \theta_2, \sigma) \ on \ \Gamma_T, \tag{2.69}$$

$$\frac{1-k}{k_2\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \theta_1}{\partial n} - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} + \varphi_{x_1} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right) + \frac{1-k}{k_2} \bar{F}_1(\theta_1, \sigma) - \frac{\bar{F}_2}{k} \ on \ \Gamma_T. \tag{2.70}$$

$$\theta_i(x,t) = 0 \ on \ \Gamma_{iT}, \ \frac{\partial \theta_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \tag{2.71}$$

$$\sigma(\tau, 0) = 0, \ \frac{\partial \sigma(\tau,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \ \theta_i(x,0) = 0. \tag{2.72}$$

Remark 2.4 *As it follows from Remarks 2.2 and 2.3, the functions $F_{0i}(\theta_i, \sigma)$, $\bar{F}_1(\theta_1, \sigma)$ and $\bar{F}_2(\theta_1, \theta_2, \sigma)$ in a vicinity of the angle point O contain the higher derivatives of $\theta_i(x,t)$ and $\sigma(x_1,t)$ with coefficients that tend to zero as $t \to 0$, "quadratic" terms with respect to $\theta_i(x,t)$ and $\sigma(x_1,t)$, and their derivatives, and terms of minor differential orders of unknown functions. Moreover, the same results are saved outside the angle point O.*

In the sequel we need a some different form of system (2.67)-(2.72). It deals with the view of condition (2.70) which can be modified if we look for σ_t from condition (2.68) and after that substitute this term into (2.70). Thus, after some simple calculations we have the following system

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_2^2} = F_{0i}(\theta_i, \sigma) \ in \ \Omega_{iT}, \tag{2.73}$$

$$\theta_1(x,t) - \theta_2(x,t) = \frac{1-k}{k} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}} \frac{\partial v_{10}}{\partial n} \sigma \ on \ \Gamma_T, \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} - k\frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial \tau}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right) = \bar{F}_2(\theta_1, \theta_2, \sigma) \ on \ \Gamma_T, \tag{2.75}$$

$$\frac{1}{k_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial n}} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n} - \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) - \varphi_{x_1} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right)$$
$$= \frac{1-k}{k_2} \bar{F}_1(\theta_1, \sigma) - \frac{\bar{F}_2}{k} \equiv \bar{\bar{F}}_1(\theta_1, \theta_2, \sigma) \ on \ \Gamma_T, \tag{2.76}$$

$$\theta_i(x,t) = 0 \ on \ \Gamma_{iT}, \ \frac{\partial \theta_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \tag{2.77}$$

$$\sigma(\tau, 0) = 0, \ \frac{\partial \sigma(\tau,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \ \theta_i(x,0) = 0. \tag{2.78}$$

3 Model problems

As is known in the Schauder method, to construct a model problem near the boundary it is necessary to fix coefficients of the original problem at the boundary point and to straighten, if it is necessary, the boundary in some vicinity of the fixed point.

3.1 A model problem near a corner point

Let now the such fixed point be the angle point in problem (2.67)-(2.72). Denote by

$$G_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, -\infty < x_2 < x_1 \cot \tfrac{\delta}{2}\}, \quad G_{1T} = G_1 \times [0, T],$$

$$G_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_1 \cot \tfrac{\delta}{2} < x_2 < \infty\}, \quad G_{2T} = G_2 \times [0, T],$$

$$g = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 = x_1 \cot \tfrac{\delta}{2}\}, \quad g_T = g \times [0, T].$$

After some evident transformations to eliminate the unknown function $\sigma(\omega, t)$ (see (2.73)-(2.78)) we obtain the model problem in a plane corner for functions $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} = 0 \ in \ G_{iT}, \ u_i(x, 0) = 0, \ i = 1, 2, \tag{3.1}$$

$$r^{-1-\gamma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) + h\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = f(r, t) \ on \ g_T, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - k\frac{\partial u_2}{\partial n} - kd_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = 0 \ on \ g_T, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0, \ on \ \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \times [0, T]; \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0, \ on \ \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \times [0, T], \tag{3.4}$$

where $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $0 < k < 1$, $h = \cot \frac{\delta}{2}$, $\delta \in (0, \pi)$, $d_1 = \frac{\partial v_{01}/dr}{\partial v_{01}/dn}|_{x_1 = x_2 = 0}$, and γ is the some positive number defined by (2.19). We have taken into account the asymptotic behaviour of the function $\frac{\partial v_{01}}{\partial n}$ as $x \to 0$ in problem (2.17), $\frac{\partial v_{01}}{\partial n} \sim A_3 r^{1+\gamma}$, A_3 is a negative constant, and then assumed without loss of generality that $(-k_1 A_3) = 1$.

Note that problem (3.1)-(3.4) has been studied in the recent work [9] (see Section 3 there) where the one-valued solvability of this problem has been proved under more general assumption on the constants. In our case we reformulate the results of Theorems 3.1 and 3.2 and Remark 4.1 from [9] as:

Theorem 3.1 *Let* $\alpha \in (0, 1)$ *and*

$$f(x, t) \in E_{s-1}^{1+\alpha, \alpha, \alpha}(\bar{g}_T), \ f(x, t) = 0 \ if \ either \ t < 0 \ or \ |x| > R_0$$

for some positive R_0*, and*

i

$$s \in \left(\max\{2+1/2, \tfrac{b_1^*}{\pi-\delta}, \tfrac{a_1^*}{\pi-\delta}\}, \frac{5\pi}{2\pi-\delta}\right) \; if \; \delta \in (0, \pi/5),$$

ii

$$s \in \left(\max\{\tfrac{2\pi}{\pi-\delta}, \tfrac{b_2^*}{\pi-\delta}, \tfrac{a_2^*}{\pi-\delta}\}, \frac{5\pi}{2\pi-\delta}\right) \; if \; \delta \in (\pi/5, \pi/4),$$

where numbers b_j^* *and* a_j^*, $j = 1, 2$, *are some positive constants depended on* k, h, d_1, *and* δ. *Then there exists a unique solution* (u_1, u_2) *of problem* (3.1)-(3.4) *such that* $u_i \in E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})$ *and the estimates hold:*

$$\sum_{i=1}^{2}\{\|u_i\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})} + \|r^{-1-\gamma}\partial u_i/\partial t\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)}\} \le const.\|f\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{E_s^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})} \le const.T^{\alpha^*-\alpha}\max\{1, R_0^{\alpha^*\gamma}\}\|f\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)}, \tag{3.6}$$

where $\alpha < \alpha^* < 1$.

As it is shown in [9] (see Theorem 2.1 and Remark 4.1 there), the results of Theorem 3.1 are saved in the case of the nonhomogeneous boundary value problem corresponding (3.1)-(3.4)

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} = f_{0i} \; in \; G_{iT}, \; u_i(x,0) = 0, \; i = 1, 2, \tag{3.7}$$

$$r^{-1-\gamma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) + h\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = f(r,t) \; on \; g_T, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - k\frac{\partial u_2}{\partial n} - kd_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = f_1 \; on \; g_T, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0, \; on \; \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \times [0,T]; \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0, \; on \; \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \times [0,T]. \tag{3.10}$$

For the sake of convenience we reformulate this results as follows.

Theorem 3.2 *Let* s *satisfy conditions* ***i***, ***ii*** *from Theorem 3.1,* $f_{0i} \in E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})$, $i = 1, 2$, $f_1, f \in E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)$, *and* $f_{0i}, f_1, f = 0$ *if either* $t \le 0$ *or* $|x| > R_0$, *for some positive number* R_0. *Then there exists a unique solution* $u_i \in E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})$, $i = 1, 2$, *of problem* (3.7)-(3.10) *and the estimate holds:*

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})} + \|r^{-1-\gamma}(\partial u_1/\partial t - \partial u_2/\partial t)\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)}$$

$$\le const.[\sum_{i=1}^{2}\|f_{0i}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{G}_{iT})} + \|f_1\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)} + \|f\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{g}_T)}]. \tag{3.11}$$

3.2 A model problem near a smooth part of the interface

We consider now the case when the fixed point $x = \tilde{x}$ is outward to ε_0-vicinity of the corner point O. Then some evident transformations in system (M_2) of equations (2.33)-(2.38) lead to the following problem in half spaces. Let

$$R^2_+ = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 > 0\}, \quad R^2_{+T} = R^2_+ \times (0, T);$$

$$R^2_- = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 < 0\}, \quad R^2_{-T} = R^2_- \times (0, T);$$

$$R^2_{\pm T} = R^2_\pm \times (0, T); \quad R^1_T = R^1 \times (0, T); \quad a_0 = -\left(k_1 \frac{\partial v_{01}}{\partial n}\right)^{-1}\Big|_{x=\tilde{x}}.$$

We search a solution $(u_+(x_1, x_2, t), u_-(x_1, x_2, t))$ bounded at the infinity by the conditions

$$\Delta_x u_\pm = f_0^\pm \quad in \quad R^2_{\pm T}; \quad u_\pm(x_1, x_2, 0) = 0, \quad x \in R^2_\pm; \tag{3.12}$$

$$a_0 \left(\frac{\partial u_-}{\partial t} - \frac{\partial u_+}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u_-}{\partial n} - \frac{\partial u_+}{\partial n}\right) + a_1 \left(\frac{\partial u_-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_+}{\partial x_1}\right) = f_1, \quad (x,t) \in \overline{R^1_T}; \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial n} - k\frac{\partial u_+}{\partial n} - ka_2 \left(\frac{\partial u_-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_+}{\partial x_1}\right) = f_2, \quad (x,t) \in \overline{R^1_T}; \tag{3.14}$$

where Δ_x is the Laplace operator with respect to (x_1, x_2); n is the normal to R^1 directed in R^2_-; a_i, $i = 0, 1, 2$, are some given constants, $a_1 \geq 0$; $f_0^\pm$, f_i, $i = 1, 2$, are the given functions such that

$$f_0^\pm, f_1, f_2 = 0, \; if \; either \; t \leq 0 \; or \; |x| > R_0, \tag{3.15}$$

for some positive number R_0. We suppose that condition (2.20) holds so that $a_0 > 0$. It can be checked that if $\tilde{x}$ is outward $2\varepsilon_0-$vicinity of the point O, then $a_i \equiv 0$, $i = 1, 2$.

In the case of $a_i = 0$, $i = 1, 2$, problem (3.12)-(3.14) has been studied by F. Yi [30] and the one-valued solvability of the problem was proved in the class $C^{2+\alpha}_T(R^2_\pm) = C([0, T]; C^{2+\alpha}(R^2_\pm))$, $\alpha \in (0, 1)$. Here we will prove the one-to-one solvability of (3.12)-(3.14) in the class $E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}$ if $a_i \neq 0$, $i = 1, 2$.

First of all we study problem (3.12)-(3.14) in the special case

$$f_0^\pm = f_2 \equiv 0, \tag{3.16}$$

and construct the integral representation to the solution $(u_+(x_1, x_2, t), u_-(x_1, x_2, t))$. We denote by $\tilde{u}(\lambda, x_2, t)$ the Fourier transformation of the function $u(x_1, x_2, t)$, and by $\hat{u}(\cdot, \nu)$ the Laplace transformation of $u(\cdot, t)$, and use the notation " $*$ " instead of " $\widehat{\widetilde{\ }}$ ". After applying of the Fourier and Laplace transformations to problem (3.12)-(3.14), we get

$$\frac{\partial^2 u^*_\pm}{\partial x_2^2} - \lambda^2 u^*_\pm = 0, \quad u^*_\pm(\lambda, x_2, 0) = 0; \tag{3.17}$$

$$\nu a_0[u_-^*(\lambda, x_2, \nu) - u_+^*(\lambda, x_2, \nu)] - \frac{\partial}{\partial x_2}[u_-^*(\lambda, x_2, \nu) - u_+^*(\lambda, x_2, \nu)]$$
$$+ia_1\lambda[u_-^*(\lambda, x_2, \nu) - u_+^*(\lambda, x_2, \nu)] = f_1^*(\lambda, \nu) \text{ on } x_2 = 0; \tag{3.18}$$
$$\frac{\partial u_-^*(\lambda,x_2,\nu)}{\partial x_2} - k\frac{\partial u_+^*(\lambda,x_2,\nu)}{\partial x_2} + ika_2\lambda[u_-^*(\lambda, x_2, \nu) - u_+^*(\lambda, x_2, \nu)] = 0 \text{ on } x_2 = 0. \tag{3.19}$$

To satisfy equations in (3.17) we set

$$u_-^*(\lambda, x_2, \nu) = M_-(\lambda, \nu)e^{|\lambda|x_2}, \quad u_+^*(\lambda, x_2, \nu) = M_+(\lambda, \nu)e^{-|\lambda|x_2};$$

and to find the unknown functions M_-, M_+, we have two transmission equations (3.18) and (3.19). It is easy to show that

$$M_-(\lambda, \nu) = -k\frac{|\lambda| - ia_2\lambda}{|\lambda| + ika_2\lambda}M_+(\lambda, \nu), \text{ and } M_+(\lambda, \nu)\left[1 + k\frac{|\lambda| - ia_2\lambda}{|\lambda| + ika_2\lambda}\right]$$
$$\times\left[-\nu a_0 - ia_1\lambda - |\lambda|\frac{1 - k\frac{|\lambda|-ia_2\lambda}{|\lambda|+ika_2\lambda}}{1 + k\frac{|\lambda|-ia_2\lambda}{|\lambda|+ika_2\lambda}}\right] = f_1^*(\lambda, \nu).$$

Thus, after some simple calculations in the last equation, one can get

$$M_+(\lambda, \nu) = \frac{1}{Q(\lambda, \nu)}\frac{1 + ika_2\frac{\lambda}{|\lambda|}}{k+1}f_1^*(\lambda, \nu), \tag{3.20}$$

$$M_-(\lambda, \nu) = -\frac{1}{Q(\lambda, \nu)}\frac{k\left(1 - ia_2\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)}{k+1}f_1^*(\lambda, \nu), \tag{3.21}$$

where
$$Q(\lambda, \nu) = -\nu a_0 + \frac{k-1}{k+1}|\lambda| - i\lambda\left(a_1 + \frac{2ka_2}{1+k}\right). \tag{3.22}$$

Note that if condition(2.20) holds, then $-a_0 < 0$ and $ReQ(\lambda, \nu) < 0$ in the case of $Re\nu > 0$ and $Im\lambda = 0$. Hence, the function $\frac{1}{Q(\lambda,\nu)}$ does not have any singularities in the pointed out case.

Let

$$F_+^*(\lambda, \nu) = -\frac{f_1^*(\lambda, \nu)}{a_0(k+1)}\left(1 + ika_2\frac{\lambda}{|\lambda|}\right), \quad F_-^*(\lambda, \nu) = \frac{kf_1^*(\lambda, \nu)}{a_0(k+1)}\left(1 - ia_2\frac{\lambda}{|\lambda|}\right),$$
$$Q_1(\lambda, \nu) = \nu + A_1|\lambda| + iA_2\lambda, \tag{3.23}$$

where $A_1 = \frac{1-k}{a_0(k+1)}$ and $A_2 = \frac{1}{a_0}\left(a_1 + \frac{2ka_2}{1+k}\right)$. Then functions M_+ and M_- can be rewritten as

$$M_+(\lambda, \nu) = \frac{F_+^*(\lambda, \nu)}{Q_1(\lambda, \nu)}, \; M_-(\lambda, \nu) = \frac{F_-^*(\lambda, \nu)}{Q_1(\lambda, \nu)};$$

and the solution (u_+^*, u_-^*) is

$$u_+^*(\lambda, x_2, \nu) = \frac{F_+^*(\lambda,\nu)}{Q_1(\lambda,\nu)} e^{-|\lambda| x_2},\ u_-^*(\lambda, x_2, \nu) = \frac{F_-^*(\lambda,\nu)}{Q_1(\lambda,\nu)} e^{|\lambda| x_2}. \tag{3.24}$$

Thus after the inverse Laplace and Fourier transformations, the solution (u_-^*, u_+^*) is represented as

$$u_\pm(x_1, x_2, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\pm(x_1 - \xi, t - \tau) K_\pm(\xi, x_2, \tau) d\xi, \tag{3.25}$$

where $K_\pm(x_1, x_2, t)$ is the inverse Fourier and Laplace transformations of the function $\frac{e^{\pm|\lambda| x_2}}{Q_1(\lambda,\nu)}$. Introduce the notation

$$K_+(x_1, 0, t) = K_-(x_1, 0, t) := K(x_1, t). \tag{3.26}$$

As for the functions $F_\pm(x_1, t)$, they are the inverse Fourier and Laplace transformations of $F_\pm^*(\lambda, \nu)$. The results of Privalov's theorem for the singular integral (see e.g. Theorem 15.3 in [11] or Theorem 3.1.1 in [10]) together with the properties of the function $f_1(x_1, t)$ give the following

$$\|F_\pm\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R_T^1})} \leq const. \|f_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R_T^1})}. \tag{3.27}$$

To estimate the functions $u_\pm(x_1, x_2, t)$, it is necessary the following properties of the kernel $K(x_1, t)$.

Lemma 3.1 *Let $\alpha \in (0,1)$, $t \in [0,T]$, $\Delta x = \bar{x}_1 - x_1$ for every $\bar{x}_1$, $x_1 \in R^1$, then the following holds*

i

$$K(x_1, t) = \frac{2}{A_1 t \left(1 + \left[\frac{x_1 - A_2 t}{A_1 t}\right]^2\right)}, \qquad K(x_1, t) > 0; \tag{3.28}$$

ii

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^l K(y,\tau)}{\partial y^l} dy = \begin{cases} 2\pi t, & l = 0; \\ 0, & l > 0; \end{cases} \tag{3.29}$$

iii

$$I_1 := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^\alpha \left| \frac{\partial K(y,\tau)}{\partial y} \right| dy \leq const. t^\alpha; \tag{3.30}$$

iv

$$I_2 := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y-A_2\tau|<2|\Delta x|} |y|^\alpha \left|\frac{\partial K(y,\tau)}{\partial y}\right| dy \le const.|\Delta x|^\alpha; \tag{3.31}$$

v

$$I_3 := |\Delta x| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y-A_2\tau|>2|\Delta x|} |y|^\alpha \left|\frac{\partial^2 K(y,\tau)}{\partial y^2}\right| dy \le const.|\Delta x|^\alpha. \tag{3.32}$$

The proof of this lemma is technically tedious and we represent it in the Appendix.

Remark 3.1 *By using the method of the proof of Lemma 3.1, it is not difficult to get the analogous results for the function* $K_\pm(x_1, x_2, t)$*.*

Thus standard arguments of Chapter 4 [22] together with Lemma 3.1, Remark 3.1 and estimate (3.27) after routine calculations lead to inequalities

$$\|u_\pm\|_{E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{\pm T}})} + \|\tfrac{\partial u_\pm}{\partial t}\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})} \le const.\|f_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})},$$

$$\|u_\pm\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{+T}})} \le const.T^{\alpha^*-\alpha}\|f_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})}, \tag{3.33}$$

where $0 < \alpha < \alpha^* \le 1$. Note that in the case of $f_0^\pm = f_2 = 0$ the uniqueness of the solution $(u_-(x,t), u_+(x,t))$ to problem (3.12)-(3.14) follows immediately from the first inequality in (3.33). Therefore, in the case of (3.16) the one-valued solvability of problem (3.12)-(3.13) has been proved and the corresponding coercive estimates has been obtained. To extend this results onto the general case, i.e. $f_0^\pm \ne 0$, $f_2 \ne 0$, we look for the solution of problem (3.12)-(3.13) in the form:

$$u_\pm(x,t) = \bar{u}_\pm(x,t) + \bar{\bar{u}}_\pm(x,t),$$

where $\bar{u}_\pm(x,t)$ is the solution of the transmission problem:

$$\Delta\bar{u}_\pm = f_0^\pm \ in\ R^2_{\pm T}, \quad \bar{u}_\pm(x,0) = 0,\ x \in R^2_\pm;$$

$$\bar{u}_+ = \bar{u}_-,\ \frac{\partial\bar{u}_-}{\partial n} - k\frac{\partial\bar{u}_+}{\partial n} = f_2,\ (x,t) \in \overline{R^1_T}; \tag{3.34}$$

and $\bar{\bar{u}}_\pm(x,t)$ is the solution of problem (3.12)-(3.13) in the case (3.16) with some new right hand side f_1.

As for $\bar{u}_\pm(x,t)$, we apply the well known results from [27] which give

$$\|\bar{u}_\pm\|_{C^{2+\alpha}(\overline{R^2_{\pm T}})} \le const.[\|f_0^\pm\|_{C^\alpha(\overline{R^2_{\pm T}})} + \|f_2\|_{C^{1+\alpha}(\overline{R^1_T})}]. \tag{3.35}$$

The corresponding smoothness of the functions $\bar{u}_\pm(x,t)$ with respect to t is obtained if one considers problem (3.34) for the functions $U_\pm = \bar{u}_\pm(x,t_1) - \bar{u}_\pm(x,t_2)$ with new right hand sides: $\bar{f}_0^{\pm} = f_0^{\pm}(x, t_1) - f_0^{\pm}(x, t_2)$; $\bar{f}_2 = f_2(x, t_1) - f_2(x, t_2)$. Inequality (3.35) in the case of functions $U_{\pm}$ together with properties of the functions $f_0^{\pm}$, f_2 lead to estimate

$$\|\bar{u}_{\pm}\|_{E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{\pm T}})} \leq const.[\|f_0^{\pm}\|_{C^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{\pm T}})} + \|f_2\|_{C^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})}]. \tag{3.36}$$

Moreover, as it follows from the third condition in (3.34)

$$\frac{\partial \bar{u}_-}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial t} = 0 \ if \ (x,t) \in \overline{R^1_T}. \tag{3.37}$$

Thus, the all written above proves the following results.

Theorem 3.3 *Let* $\alpha \in (0,1)$, $f_0^{\pm} \in E^{\alpha,\alpha,\alpha}(R^2_{\pm T})$, $f_i \in E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})$, $i = 1,2$, *and condition* (3.15) *hold. Then there exists a unique solution* $u_{\pm}(x,t) \in E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{\pm T}})$ *of problem* (3.12)-(3.14) *and the estimate is true*

$$\|u_+\|_{E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{+T}})} + \|u_-\|_{E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{-T}})} + \|\tfrac{\partial u_-}{\partial t} - \tfrac{\partial u_+}{\partial t}\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})}$$

$$\leq c[\|f_0^+\|_{C^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{+T}})} + \|f_0^-\|_{C^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^2_{-T}})} + \|f_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})} + \|f_2\|_{C^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{R^1_T})}], \tag{3.38}$$

where c is a positive constant which is independent of the right hand sides in (3.12)-(3.14).

Moreover, if in addition condition (3.16) *holds, then inequities* (3.33) *takes place.*

4 The linear problem

As it follows from (2.33)-(2.38), the linear system corresponding to nonlinear system (2.39), where the right hand side are some fixed functions, has the form

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_2^2} = f_{0i}(x,t) \quad in \ \Omega_{iT}, \tag{4.1}$$

$$\theta_1(x,t) - \theta_2(x,t) = A(x)\sigma \quad on \ \Gamma_T, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -k_1 a(x) \frac{\partial \theta_1}{\partial n} - k_1 A_1(x) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \omega} \right) + f_1(x,t) \quad on \ \Gamma_T, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} - k \frac{\partial \theta_2}{\partial n} + A_2(x) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \omega} \right) = f_2(x,t) \quad on \ \Gamma_T, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \ \theta_i(x,t) = 0 \quad on \quad \Gamma_{iT}, \tag{4.5}$$

$$\sigma(\omega, 0) = 0, \quad \theta_i(x, 0) = 0. \tag{4.6}$$

Here $f_{0i}(x,t)$, $f_i(x,t)$, $a(x)$, $A(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ are some given functions $A(x) < 0$, and

$$f_{0i}(x,0) = 0, \ x \in \Omega_i, \ i = 1,2, \ f_j(x,0) = 0, \ x \in \Gamma, \ j = 1,2. \tag{4.7}$$

In the $2\varepsilon_0-$vicinity of the corner point O the coefficients $a(x)$, $A(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ can be represented as (see (2.65), (2.66) and (2.68))

$$A(x) = \frac{1-k}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}}\frac{\partial v_{10}}{\partial n}, \quad A_1(x) = \frac{k_2}{k-1}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}\left[\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial \omega}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}} + \varphi_{x_1}\right],$$

$$a(x) = \sqrt{1+\varphi_{x_1}^2}, \quad A_2(x) = -k\frac{\frac{\partial v_{10}}{\partial \omega}}{\frac{\partial v_{10}}{\partial n}} \tag{4.8}$$

where (see (2.18)) if $x \to O$

$$\frac{\partial v_{10}}{\partial n}|_{\Gamma_T} \sim A_3 r^{1+\gamma}, \ \frac{\partial v_{10}}{\partial \omega}|_{\Gamma_T} \sim A_4 r^{1+\gamma}, \tag{4.9}$$

where γ is given with (2.19); A_3 and A_4 are nonzero constants, $A_3 < 0$. As it follows from (2.18),

$$a(x), \ A_i(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Gamma}), \ i = 1,2, \ \textit{and} \ A(x) \in E^{2+\alpha}_{1+\gamma}(\bar{\Gamma}). \tag{4.10}$$

We introduce the functional spaces H_D and H_R (so that $\mathbf{z} \in H_D$, $\bar{\mathsf{F}}(\mathbf{z}) \in H_R$) by

$$H_D = E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{1T}) \times E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{2T}) \times N_{s,\gamma}^{2+\alpha}(\bar{\Gamma}_T),$$

$$H_R = E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{1T}) \times E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{2T}) \times E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T) \times E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T),$$

and

$$\|\mathbf{z}\|_{H_D} = \|(\theta_1,\theta_2,\sigma)\|_{H_D} = \|\theta_1\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{1T})} + \|\theta_2\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{2T})} + \|\sigma\|_{N_{s,\gamma}^{2+\alpha}(\bar{\Gamma}_T)},$$

$$\|\bar{\mathsf{F}}(\mathbf{z})\|_{H_R} = \|(f_{01},f_{02},f_1,f_2)\|_{H_R} = \|f_{01}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{1T})} + \|f_{02}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{2T})}$$
$$+\|f_1\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)} + \|f_2\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)}.$$

Theorem 4.1 *Let $(f_{01},f_{02},f_1,f_2) \in H_R$ with $\alpha \in (0,1/2)$ and s satisfy conditions i, ii from Theorem 2.1, conditions (2.20) and (4.7)-(4.10) hold. Then for some T there exists a unique solution $(\theta_1,\theta_2,\sigma) \in H_D$ to problem (4.1)-(4.6) for $t \in [0,T]$ and*

$$\|(\theta_1,\theta_2,\sigma)\|_{H_D} \le const.\|(f_{01},f_{02},f_1,f_2)\|_{H_R} \tag{4.11}$$

with the constant is independent of the functions f_{01}, f_{02}, f_1, f_2.

For the sake of simplicity, we represent the proof of Theorem 4.1 in the case of $\Gamma = \Gamma(0)$ is described by the equation $x_2 = x_1 \tan\beta$ in the $2\varepsilon_0$-vicinity of the corner point O. This theorem in general case ($x_2 = \varphi(x_1)$) is proved with the same way and with the arguments and transformations from [5] and [29].

Using the results from [8], we can reduce problem (4.1)-(4.6) to the similar one with $f_{01} = f_{02} = f_2 = 0$ and some new function $f_1(x,t) \in E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$. Indeed, let

$$\theta_i(x,t) = \bar{\theta}_i(x,t) + \bar{\bar{\theta}}_i(x,t), \tag{4.12}$$

where $(\bar{\bar{\theta}}_1(x,t), \bar{\bar{\theta}}_2(x,t))$ is the solution of the problem

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{\theta}}_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{\theta}}_i}{\partial x_2^2} = f_{0i}(x,t) \quad in\ \Omega_{iT},$$

$$\bar{\bar{\theta}}_1(x,t) - \bar{\bar{\theta}}_2(x,t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_1}{\partial n} - k\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_2}{\partial n} = f_2(x,t) \quad on\ \Gamma_T,$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0,\ \bar{\bar{\theta}}_i(x,t) = 0\ on\ \Gamma_{iT},\ \bar{\bar{\theta}}_i(x,0) = 0. \tag{4.13}$$

Transmission problem (4.13) as follows from Theorem 1.1 and Remark 3.1 [8] has a unique solution $\bar{\bar{\theta}}_i(x,t) \in E_s^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{iT})$, $i = 1, 2$, and

$$\|\bar{\bar{\theta}}_1\|_{E_s^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{1T})} + \|\bar{\bar{\theta}}_2\|_{E_s^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_{2T})} \le const.(\|f_{01}\|_{E_{s-2}^{\alpha}(\bar{\Omega}_{1T})}$$
$$+\|f_{02}\|_{E_{s-2}^{\alpha}(\bar{\Omega}_{2T})} + \|f_2\|_{E_{s-1}^{1+\alpha}(\bar{\Gamma}_T)}) \tag{4.14}$$

where s satisfies the conditions from Theorem 4.1.

As for estimates of $\bar{\bar{\theta}}_i$, $i = 1, 2$, with respect to t, they are a simple consequence of (4.14), if we consider problem (4.13) for the functions $[\bar{\bar{\theta}}_i(x,t_1) - \bar{\bar{\theta}}_i(x,t_2)]$, $i = 1, 2$, and use the properties of the right hand side. Thus, we have

$$\|\bar{\bar{\theta}}_1\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{1T})} + \|\bar{\bar{\theta}}_2\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{2T})} \le const.(\|f_{01}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{1T})}$$
$$+\|f_{02}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{2T})} + \|f_2\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)}). \tag{4.15}$$

For the functions $\bar{\theta}_i(x,t)$, $i = 1, 2$, we get

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i}{\partial x_2^2} = 0 \quad in\ \Omega_{iT}, \tag{4.16}$$

$$\bar{\theta}_1(x,t) - \bar{\theta}_2(x,t) - A(x)\sigma = 0 \quad on\ \Gamma_T, \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + k_1 a(x)\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial n} + k_1 A_1(x)\left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \omega}\right)$$
$$= f_1(x,t) - k_1 a(x)\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_1}{\partial n} \equiv \bar{f}_1(x,t) \quad on\ \Gamma_T, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial n} - k\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial n} + A_2(x)\left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \omega}\right) = 0 \quad on\ \Gamma_T, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}_i}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \ \bar{\theta}_i(x,t) = 0 \quad on \quad \Gamma_{iT}, \tag{4.20}$$

$$\sigma(\omega,0) = 0, \quad \bar{\theta}_i(x,0) = 0. \tag{4.21}$$

Note that due to (4.15) and the properties of the function $f_1(x,t)$ the function $\bar{f}_1(x,t)$ belongs to $E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)$ and $\bar{f}_1(x,0) = 0$.

So it is enough to prove Theorem 4.1 for problem (4.16)-(4.21). This proof consists in two parts. The first of them is a solvability of problem (4.16)-(4.21) which is done with the technique of the regularizer for parabolic systems taken from [22]. As for uniqueness of the solutions (this is the second part of the proof of this theorem), one is deduced by the corresponding a priori estimates.

To show the solvability of system (4.16)-(4.21), we reduce one, like [24] or [21], to the following nonlocal equation

$$\mathcal{L}\sigma = \bar{f}_1 \ on \ \Gamma_T, \sigma|_{t=0} = 0 \ on \ \Gamma. \tag{4.22}$$

The operator $\mathcal{L}$ is constructed in the next way. Let σ is given in equation (4.17). Then equations (4.16), (4.17), (4.19)-(4.21) formulate the transmission problem for the functions θ_1 and θ_2. The solution of this transmission problem can be used in equation (4.18). Thus $\mathcal{L}\sigma$ is given by the left hand side of (4.18).

A nonlocal character of system (4.22) causes difficulties which require technical tricks related to a suitable localization. As well as either Chapter 4 from [22] or Section 2 from [24], or Section 4 from [21], we introduce the two collections of open sets: $\{\omega_i^m\}$ and $\{\Omega_i^m\}$, $i = 1,2$, such that

$$\bar{\omega}_i^m \subset \Omega_i^m \subset \bar{\Omega}_i, \ \cup_m \omega_i^m = \cup_m \Omega_i^m = \bar{\Omega}_i,$$

$$\omega_i^m = B_{\lambda/2}(x^m) \cap \bar{\Omega}_i; \quad \Omega_i^m = B_\lambda(x^m) \cap \bar{\Omega}_i$$

with $m = 1, ..., N_0$ and $B_\lambda(x^m)$, $B_{\lambda/2}(x^m)$ are balls with the center in x^m and the radiuses of λ and $\lambda/2$ correspondingly. Denote by $\Gamma^m = \Gamma \cap B_\lambda(x^m)$, and $\Gamma_i^m = \Gamma_i \cap B_\lambda(x^m)$, $i = 1,2$. The index m belongs to one of two sets:

$$m \in M \ if \ \bar{\Omega}_i^m \cap \Gamma = \emptyset \ and \ m \in N \ if \ \bar{\omega}_i^m \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

We say, that $m \in N_1$ if m belongs to N and $\Gamma^m \cap B_{\varepsilon_0}(0) \neq \emptyset$ ($B_{\varepsilon_0}(0)$ is the ball with the center in O and the ε_0 radius), and $N_2 = N \backslash N_1$. Moreover, $N_2 = N_{21} \cup N_{22}$, where $m \in N_{21}$ if $m \in N_2$ and $\Gamma^m \cap B_{2\varepsilon_0}(0) \neq \emptyset$ ($B_{2\varepsilon_0}(0)$ is the ball with the center in O and the $2\varepsilon_0$ radius).

The covering $\{\omega_i^m\}$ and $\{\Omega_i^m\}$, $i = 1,2$, define a partition of unity for the domains Ω_i. Let $\xi_i^m : \Omega_i \to [0,1]$, $i = 1,2$, be a smooth function such that

$$\xi_i^m = 1, \ if \ x \in \omega_i^m, \ \xi_i^m = 0, \ if \ x \in \Omega_i \backslash \Omega_i^m, \ \xi_i^m \in (0,1), \ if \ x \in \Omega_i^m \backslash \omega_i^m,$$

and $|\nabla^{|l|}\xi_i^m| \leq const.\lambda^{-|l|}$, $1 \leq \sum\limits_m (\xi_i^m)^2 \leq M_0$. By using functions ξ_i^m, we define the function

$$\eta_i^m = \frac{\xi_i^m}{\sum\limits_j (\xi_i^j)^2}.$$

By the properties of the functions ξ_i^m, the functions η_i^m vanish for $x \in \Omega_i \backslash \Omega_i^m$; in addition, $|\nabla^{|l|}\eta_i^m| \leq const.\lambda^{-|l|}$.

The functions $\eta_i^m \xi_i^m$ define the partition of unity by the following formula

$$\sum_m \eta_i^m \xi_i^m = 1, \quad i = 1, 2.$$

Note that if $m \in N$, we can choose the same functions ξ^m for both $i = 1$ and $i = 2$, and thus $\eta_1^m = \eta_2^m \equiv \eta^m$, $m \in N$.

For each $m \in N$ we pick out one point $x^m \in \omega_i^m \cap \Gamma$ which will be the origin of the local coordinate system. The description of this system can be found in Chapter 4 [22], Section 2 [24].

We introduce local coordinate systems connected with each point x^m, $m \in N_2$. Let the curve Γ be described with $y_2 = \Psi^m(y_1)$ in a small vicinity of the every point x^m, $m \in N_2$, and

$$y = B^{(m)}(x - x^m), \qquad \left|\frac{\partial \Psi^m}{\partial y_1}\right| \leq const.\lambda, \tag{4.23}$$

where $B^{(m)} = (B_{ij}^{(m)})_{i,j=1,2}$ is an orthogonal matrix. After that the local "flatness" of the boundary is made with the change of variables

$$z_1 = y_1,\ z_2 = y_2 - \Psi^m(y_1),\ m \in N_{22};\ z_1 = y_1,\ z_2 = y_2,\ m \in N_{21}. \tag{4.24}$$

Thus, the variables (x_1, x_2) connect with (z_1, z_2) by the maps Z^m (see (4.23), (4.24)), such that

$$x = Z_m(z),\ and\ z = Z_m^{-1}(x),\ m \in N_2.$$

Definition 4.1 *An operator*

$$\mathcal{R}:\ E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T) \to N_{s,\gamma}^{2+\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$$

such that

$$\mathcal{R}\bar{f}_1 = \sum_{m \in N} \eta^m s^m \tag{4.25}$$

is called a regularizer where s^m is a solution of the following problems: if $m \in N_1$, then

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_i^m}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_i^m}{\partial x_2^2} = 0 \quad in\ G_{iT},$$

$$\bar{w}_1^m(x,t) - \bar{w}_2^m(x,t) - A^m s^m = 0 \quad on\ g_T,$$
$$\frac{\partial s^m}{\partial t} + k_1 a^m \frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial n} + k_1 A_1^m \left(\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial \omega} \right) = \bar{f}_1^m(x,t) \quad on\ g_T,$$
$$\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial n} - k \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial n} + A_2^m \left(\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial \omega} \right) = 0 \quad on\ g_T,$$
$$\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial n} = 0,\ on\ \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \times [0,T]; \quad \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial n} = 0,\ on\ \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \times [0,T],$$
$$s^m(\omega, 0) = 0, \quad \bar{w}_i^m(x,0) = 0, \tag{4.26}$$

where G_{iT} and g_T are defined in Subsection 3.1;

if $m \in N_2$, then $s^m(\omega(x),t) := \hat{s}^m(\hat{\omega}(Z_m^{-1}(x)),t)$ and

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_i^m}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_i^m}{\partial z_2^2} = 0 \quad in\ R^2_{\pm T},$$

$$\hat{w}_1^m(z,t) - \hat{w}_2^m(z,t) - A^m \hat{s}^m = 0 \quad on\ R^1_T,$$
$$\frac{\partial \hat{s}^m}{\partial t} + k_1 a^m \frac{\partial \hat{w}_1^m}{\partial \hat{n}} + k_1 A_1^m \left(\frac{\partial \hat{w}_1^m}{\partial \hat{\omega}} - \frac{\partial \hat{w}_2^m}{\partial \hat{\omega}} \right) = \hat{f}_1^m(z,t) \quad on\ R^1_T,$$
$$\frac{\partial \hat{w}_1^m}{\partial \hat{n}} - k \frac{\partial \hat{w}_2^m}{\partial \hat{n}} + A_2^m \left(\frac{\partial \hat{w}_1^m}{\partial \hat{\omega}} - \frac{\partial \hat{w}_2^m}{\partial \hat{\omega}} \right) = 0 \quad on\ R^1_T,$$
$$\hat{s}^m(\omega, 0) = 0, \quad \hat{w}_i^m(z,0) = 0, \tag{4.27}$$

where $\hat{\omega} := \hat{\omega}(z)$ and $\hat{n} := \hat{n}(z)$ are the unit vectors with the coordinates $\{1,0\}$ and $\{0,-1\}$, correspondingly, in the plane R^2, i.e. $\frac{\partial}{\partial \hat{n}} = -\frac{\partial}{\partial z_2}$ and $\frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} = \frac{\partial}{\partial z_1}$. Here

$$\bar{f}_1^m = \bar{f}_1 \xi^m,\ \hat{f}_1^m(z,t) = \bar{f}_1^m(Z_m(z),t),\ a^m = a(x^m),\ A_i^m = A_i(x^m),\ i = 1,2;$$
$$A^m = A(x^m) \leq 0,\ if\ m \in N_2,\ and\ for\ m \in N_1\ A^m = r^{1+\gamma} \tilde{A}^m,$$
$$\tilde{A}^m = \frac{1-k}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2(x^m)}} A_3, \tag{4.28}$$

where A_3 is a negative constant from (4.9).

Note that after simple transformations like them from Subsection 2.4 (see (2.65)-(2.78)), the results Section 3 are applied to the solutions of problems (4.26) and (4.27).

The operator $\mathcal{R}$ enables to construct an inverse operator to $\mathcal{L}$ by the methods from Section 4 [21]. First we need the following result.

Lemma 4.1 *Let conditions of Theorem 4.1 hold, and* $\bar{F}(\mathbf{z}) = (0,0,\bar{f}_1,0)$*,* $\bar{f}_1(x,t) \in E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)$*,* $\bar{f}_1(x,0)=0$*, then*

$$\mathcal{L}\mathcal{R}\bar{f}_1 = \bar{f}_1 + \mathcal{T}\bar{f}_1, \tag{4.29}$$

and the norm of the operator $\mathcal{T}$ *is small and controlled by a quantity* $C(\lambda,T)$*. If the time interval and* λ *tend to zero,* $C(\lambda,T)$ *vanishes.*

Proof. We will use below the notation $\bar{w}^m_i(x,t) := \hat{w}^m_i(Z^{-1}_m(x),t)$, $n := \hat{n}(Z^{-1}_m(x))$, $\omega := \hat{\omega}(Z^{-1}_m(x))$ $m \in N_2$.

Let us introduce the auxiliary functions

$$v^i_{\bar{f}_1} = \sum_{m\in N} \eta^m \bar{w}^m_i,\ i=1,2, \tag{4.30}$$

which is the solution of the following transmission problem

$$\Delta_x v^i_{\bar{f}_1} = \sum_{m\in N}[2\nabla_x\eta^m\nabla_x\bar{w}^m_i + \bar{w}^m_i\Delta_x\eta^m] + \sum_{m\in N_{22}}\eta^m\Delta_x\bar{w}^m_i(x) \equiv g_{0i}\ in\ \Omega_{iT}, \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} v^1_{\bar{f}_1} - v^2_{\bar{f}_1} &= \sum_{m\in N} A^m s^m\eta^m = \sum_{m\in N}[A^m - A(x)]s^m\eta^m + A(x)\sum_{m\in N} s^m\eta^m \\ &= \sum_{m\in N}[A^m - A(x)]s^m\eta^m + A(x)\mathcal{R}\bar{f}_1 \equiv g_1\ on\ \Gamma_T, \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^1_{\bar{f}_1}}{\partial n} - k\frac{\partial v^2_{\bar{f}_1}}{\partial n} &= -\sum_{m\in N} A^m_2\left[\frac{\partial\bar{w}^m_1}{\partial\omega} - \frac{\partial\bar{w}^m_2}{\partial\omega}\right]\eta^m + \sum_{m\in N}[\bar{w}^m_1 - k\bar{w}^m_2]\frac{\partial\eta^m}{\partial n} \\ = -A_2(x)\sum_{m\in N}\left[\frac{\partial\bar{w}^m_1}{\partial\omega} - \frac{\partial\bar{w}^m_2}{\partial\omega}\right]\eta^m &+ \sum_{m\in N}[A_2(x) - A^m_2]\left[\frac{\partial\bar{w}^m_1}{\partial\omega} - \frac{\partial\bar{w}^m_2}{\partial\omega}\right]\eta^m \\ &+ \sum_{m\in N}[\bar{w}^m_1 - k\bar{w}^m_2]\frac{\partial\eta^m}{\partial n} \equiv g_2 \quad on \quad \Gamma_T, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$v^i_{\bar{f}_1} = 0\ on \quad \Gamma_{iT}, \qquad v^i_{\bar{f}_1}(x,0) = 0. \tag{4.34}$$

As for solvability of problem (4.31)-(4.34), we can apply results of Theorem 1.1 and Remark 3.1 from [8] and obtain the existence of a unique solution $(v^1_{\bar{f}_1}, v^2_{\bar{f}_1})$

$$\sum_{i=1}^2 \|v^i_{\bar{f}_1}\|_{E^{2+\alpha}_s(\bar{\Omega}_{iT})} \le const.[\sum_{i=1}^2 \|g_{0i}\|_{E^{\alpha}_{s-2}(\bar{\Omega}_{iT})} + \|g_1\|_{E^{2+\alpha}_s(\bar{\Gamma}_T)} + \|g_2\|_{E^{1+\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}].$$

To estimate the functions $v^i_{\bar f_1}$, $i=1,2$, with respect to t, we consider system (4.30)-(4.34) for the difference $[v^i_{\bar f_1}(x,t_1)-v^i_{\bar f_1}(x,t_2)]$ with the corresponding right hand side and obtain

$$\sum_{i=1}^{2}\|v^i_{\bar f_1}\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar\Omega_{iT})}\le const.[\sum_{i=1}^{2}\|g_{0i}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar\Omega_{iT})}$$

$$+\|g_1\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar\Gamma_T)}+\|g_2\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar\Gamma_T)}]. \tag{4.35}$$

Now we study the action of the operator $\mathcal{L}$ onto $\mathcal{R}\bar f_1$:

$$\mathcal{L}\mathcal{R}\bar f_1=\frac{\partial\mathcal{R}\bar f_1}{\partial t}+k_1a(x)\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial n}+k_1A_1(x)\left[\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial\omega}-\frac{\partial\bar\theta_2}{\partial\omega}\right]$$

$$=\sum_{m\in N}\eta^m\frac{\partial s^m}{\partial t}+k_1a(x)\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial n}+k_1A_1(x)\left[\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial\omega}-\frac{\partial\bar\theta_2}{\partial\omega}\right], \tag{4.36}$$

and next making use the third conditions in (4.26) and (4.27), we have

$$\sum_{m\in N}\eta^m\frac{\partial s^m}{\partial t}=\sum_{m\in N_1}\eta^m\bar f_1^m(x,t)-k_1\sum_{m\in N_1}A_1^m\left[\frac{\partial\bar w_1^m}{\partial\omega}-\frac{\partial\bar w_2^m}{\partial\omega}\right]\eta^m$$

$$-k_1\sum_{m\in N_1}a^m\eta^m\frac{\partial\bar w_1^m}{\partial n}-k_1\sum_{m\in N_2}A_1^m\left[\frac{\partial\hat w_1^m(z,t)}{\partial\hat\omega}-\frac{\partial\hat w_2^m(z,t)}{\partial\hat\omega}\right]|_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m$$

$$+\sum_{m\in N_2}\eta^m\hat f_1^m(Z_m^{-1}(x),t)-k_1\sum_{m\in N_2}a^m\eta^m\frac{\partial\hat w_1^m(z,t)}{\partial\hat n}|_{z=Z_m^{-1}(x)}=\bar f_1$$

$$-k_1\sum_{m\in N_1}A_1^m\left[\frac{\partial\bar w_1^m}{\partial\omega}-\frac{\partial\bar w_2^m}{\partial\omega}\right]\eta^m-k_1\sum_{m\in N_1}a^m\eta^m\frac{\partial\bar w_1^m}{\partial n}-k_1\sum_{m\in N_2}a^m\eta^m$$

$$\times\frac{\partial\hat w_1^m(z,t)}{\partial\hat n}|_{z=Z_m^{-1}(x)}-k_1\sum_{m\in N_2}A_1^m\left[\frac{\partial\hat w_1^m(z,t)}{\partial\hat\omega}-\frac{\partial\hat w_2^m(z,t)}{\partial\hat\omega}\right]|_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m.$$

We substitute the value of $\sum\limits_{m\in N}\eta^m\frac{\partial s^m}{\partial t}$ into (4.36) and

$$\mathcal{L}\mathcal{R}\bar f_1=\bar f_1+k_1a(x)\left[\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial n}-\frac{\partial v^1_{\bar f_1}}{\partial n}\right]+k_1A_1(x)\left[\frac{\partial\bar\theta_1}{\partial\omega}-\frac{\partial v^1_{\bar f_1}}{\partial\omega}\right]$$

$$+k_1a(x)\sum_{m\in N}\bar w_1^m\frac{\partial\eta^m}{\partial n}-k_1A_1(x)\left[\frac{\partial\bar\theta_2}{\partial\omega}-\frac{\partial v^2_{\bar f_1}}{\partial\omega}\right]+k_1A_1(x)\sum_{m\in N}[\bar w_1^m-\bar w_2^m]\frac{\partial\eta^m}{\partial\omega}$$

$$+k_1 \sum_{m\in N} [A_1(x) - A_1^m] \left[\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial \omega} \right] \eta^m + k_1 \sum_{m\in N} [a(x) - a^m] \frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial n} \eta^m + k_1 \sum_{m\in N_2} A_1^m$$

$$\times \eta^m \left[\frac{\partial \bar{w}_1^m(x,t)}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{w}_2^m(x,t)}{\partial \omega} - \frac{\partial \hat{w}_1^m(z,t)}{\partial \hat{\omega}}|_{z=Z_m^{-1}(x)} + \frac{\partial \hat{w}_2^m(z,t)}{\partial \hat{\omega}}|_{z=Z_m^{-1}(x)} \right]$$

$$+k_1 \sum_{m\in N_2} a^m \eta^m \left[\frac{\partial \bar{w}_1^m(x,t)}{\partial n} - \frac{\partial \hat{w}_1^m(z,t)}{\partial \hat{n}}|_{z=Z_m^{-1}(x)} \right]. \tag{4.37}$$

To evaluate the right hand side of (4.37), we describe the properties of the functions $(\bar{\theta}_i - v^i_{\bar{f}_1})$, $i = 1, 2$.

Let

$$U_i(x,t) := \bar{\theta}_i - v^i_{\bar{f}_1}, \ (x,t) \in \bar{\Omega}_{iT},$$

then the simple calculations give (if one takes into account (4.16)-(4.21) and (4.31)-(4.33); and puts $\sigma = \sum\limits_{m\in N} \eta^m s^m$ in (4.17) as we consider $\mathcal{LR}\bar{f}_1$ now)

$$\Delta_x U_i = -g_{0i}(x,t) \ in \ \Omega_{iT}, \tag{4.38}$$

$$U_1 - U_2 = \sum_{m\in N} [A(x) - A^m] s^m \eta^m \equiv \bar{g}_1(x,t) \ on \ \Gamma_T, \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} - k\frac{\partial U_2}{\partial n} = A_2(x) \left[\frac{\partial U_1}{\partial \omega} - \frac{\partial U_2}{\partial \omega} \right] - A_2(x) \sum_{m\in N} [\bar{w}_1^m - \bar{w}_2^m] \frac{\partial \eta^m}{\partial \omega}$$

$$- \sum_{m\in N} [\bar{w}_1^m - k\bar{w}_2^m] \frac{\partial \eta^m}{\partial n} + \sum_{m\in N} \eta^m [A_2(x) - A_2^m] \left[\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial \omega} \right]$$

$$= A_2(x) \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \omega} - A_2(x) \sum_{m\in N} [\bar{w}_1^m - \bar{w}_2^m] \frac{\partial \eta^m}{\partial \omega} - \sum_{m\in N} [\bar{w}_1^m - k\bar{w}_2^m] \frac{\partial \eta^m}{\partial n}$$

$$+ \sum_{m\in N} \eta^m [A_2(x) - A_2^m] \left[\frac{\partial \bar{w}_1^m}{\partial \omega} - \frac{\partial \bar{w}_2^m}{\partial \omega} \right] \equiv \bar{g}_2(x,t) \ on \ \Gamma_T, \tag{4.40}$$

$$U_i = 0 \ on \quad \Gamma_{iT}, \qquad U_i(x,0) = 0. \tag{4.41}$$

The one-valued solvability of transmission problem (4.38)-(4.41) and the estimates of the solution follow from results of Theorem 1.1 and Remark 3.1 [8],

$$\sum_{i=1}^{2} \|U_i\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{iT})} \le const. [\sum_{i=1}^{2} \|g_{0i}\|_{E_{s-2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{iT})}$$

$$+ \|\bar{g}_1\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)} + \|\bar{g}_2\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)}]. \tag{4.42}$$

As for the estimate of the right hand side of (4.42), we have got

$$\sum_{i=1}^{2}\|g_{0i}\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega_{iT})}+\|\bar g_1\|_{E^{2+\alpha,\alpha,\alpha}_{s}(\bar\Gamma_T)}+\|\bar g_2\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma_T)}\le C(T,\lambda)\|\bar f_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma_T)} \tag{4.43}$$

with $0<C(T,\lambda)<<1$ as $\lambda\to 0$.

The proof of (4.43) is based on tedious calculations, by using the results of Theorems 3.1, 3.3 and the properties (4.8)-(4.10) of the functions $a(x)$, $A(x)$, $A_i(x)$, $i=1,2$.

Here we prove (4.43) only in the case of $\|g_{0i}\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega_{iT})}$, the rest terms are estimated similarly. Note that we use essentially inequalities (39)-(43) from Section 5 [3] and their weighted variants and results of Theorems 3.1 and 3.2. In these inequalities the minor semi-norms of a function was estimated with the major ones with small coefficients. For example, if a function $W(x,t)$ vanishes as $t=0$ then

$$\langle W\rangle^{(\alpha)}_{x,s,\Omega_T}\le T^{\alpha}[W]^{(\alpha,\alpha)}_{s,\Omega_T},\ t\in[0,T]. \tag{4.44}$$

It is easy to check that

$$\|g_{0i}\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega_{iT})}\le const.(\sup_{m\in N}[\|\nabla\eta^m\nabla\bar w_i^m\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega^m_{iT})}+\|\bar w_i^m\Delta\eta^m\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega^m_{iT})}]$$
$$+\sup_{m\in N_{22}}\|\eta^m\Delta\bar w_i^m\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega^m_{iT})}), \tag{4.45}$$

$$\sup_{\bar\Omega^m_{iT}} r^{-s+2}|\bar w_i^m||\Delta\eta^m|\le const.\frac{T^{\alpha}}{\lambda^2}\langle\bar w_i^m\rangle^{(\alpha)}_{t,s,\bar\Omega^m_{iT}}$$
$$\le const.\lambda^{-2}T^{\alpha^*}\|\bar f_1^m\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma^m_T)}, \tag{4.46}$$

$$\langle\bar w_i^m\Delta\eta^m\rangle^{(\alpha)}_{x,s-2,\bar\Omega^m_{iT}}\le const.(T^{\alpha}\lambda^{-2-\alpha}\langle\bar w_i^m\rangle^{(\alpha)}_{t,s,\bar\Omega^m_{iT}}+T^{\alpha}\lambda^{-1-\alpha}\langle D_x\bar w_i^m\rangle^{(\alpha)}_{t,s-1,\bar\Omega^m_{iT}})$$
$$\le const.T^{\alpha^*}(\lambda^{-2-\alpha}+\lambda^{-1-\alpha})\|\bar f_1^m\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma^m_T)}, \tag{4.47}$$

$$\langle\bar w_i^m\Delta\eta^m\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar\Omega^m_{iT}}\le const.\lambda^{-2}T^{\alpha^*-\alpha}\|\bar f_1^m\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma^m_T)}, \tag{4.48}$$

and at last

$$[\bar w_i^m\Delta\eta^m]^{(\alpha,\alpha)}_{s-2,\bar\Omega^m_{iT}}\le const.(T^{\alpha^*-\alpha}\lambda^{-2-\alpha}+T^{\alpha^*}\lambda^{-1-\alpha})\|\bar f_1^m\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma^m_T)}, \tag{4.49}$$

where $\alpha<\alpha^*<1$ as before. Moreover, the simple calculations lead to

$$\|\bar f_1^m\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma^m_T)}\le const.(1+\lambda^{\alpha-1}+\lambda^{-2\alpha}+\lambda^{1-3\alpha})\|\bar f_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar\Gamma_T)}. \tag{4.50}$$

Thus, we can conclude from inequalities (4.46)-(4.50) that

$$\sup_{m\in N}\|\bar w_i^m\Delta\eta^m\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar\Omega^m_{iT})}\le const.\frac{T^{\alpha^*-\alpha}}{\lambda^{3+\alpha}}(1+\lambda T^{\alpha})(\lambda+\lambda^{\alpha}+\lambda^{1-2\alpha}+\lambda^{2-3\alpha})$$

$$\times\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)} \equiv C_1(\lambda,T)\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}. \tag{4.51}$$

If we chose value T such that

$$T^{\alpha^*-\alpha}\lambda^{-3-\alpha} = \nu << 1 \tag{4.52}$$

then due to $0 < \alpha < 1/2$

$$C_1(\lambda,T) = \nu(1+\nu^{\frac{\alpha}{\alpha^*-\alpha}}\lambda^{\frac{\alpha(3+\alpha)}{\alpha^*-\alpha}})(\lambda+\lambda^{\alpha}+\lambda^{1-2\alpha}+\lambda^{2-3\alpha}) << 1, \tag{4.53}$$

if λ vanishes. The term $\sup\limits_{m\in N}\|\nabla\eta^m\ \nabla\bar{w}_i^m\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar{\Omega}^m_{iT})}$ is estimated with the same way. Following the arguments from Chapter 4 [22], we can deduce that the "worst" term in $\sup\limits_{m\in N_{22}}\|\eta^m\ \Delta_x\bar{w}_i^m\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar{\Omega}^m_{iT})}$ is $\sup\limits_{m\in N_{22}}\left\|\left[\frac{\partial^2\hat{w}_i^m}{\partial z_1\partial z_2}\Psi^m_{z_1}(z_1)\right]_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m\right\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar{\Omega}^m_{iT})}$, $m\in N_{22}$ (the other terms are evaluated either with the arguments below or with the simpler reasonings).

Note that, as it follows from the definition of the spaces $E_s^{k+\alpha,\alpha,\alpha}$, $\|\cdot\|_{E_s^{k+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}^m_{iT})}$ $\sim \|\cdot\|_{C^{k+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}^m_{iT})}$ if $m\in N_{22}$. The simple calculations and inequalities (4.23), (4.44), (4.50) drive to

$$\sup_{\bar{\Omega}^m_{iT}}\left|\left[\frac{\partial^2\hat{w}_i^m}{\partial z_1\partial z_2}\Psi^m_{z_1}(z_1)\right]_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m\right| \le const.T^{\alpha}\lambda^{1-2\alpha}\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}; \tag{4.54}$$

$$\left\langle\left[\frac{\partial^2\hat{w}_i^m}{\partial z_1\partial z_2}\Psi^m_{z_1}(z_1)\right]_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m\right\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}^m_{iT}} \le const.\lambda^{1-2\alpha}\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}; \tag{4.55}$$

$$\left\langle\left[\frac{\partial^2\hat{w}_i^m}{\partial z_1\partial z_2}\Psi^m_{z_1}(z_1)\right]_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m\right\rangle^{(\alpha)}_{x,s-2,\bar{\Omega}^m_{iT}} \le const.[1+\lambda^{-\alpha}]T^{\alpha}\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}; \tag{4.56}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2\hat{w}_i^m}{\partial z_1\partial z_2}\Psi^m_{z_1}(z_1)\right)_{z=Z_m^{-1}(x)}\eta^m\right]^{(\alpha,\alpha)}_{s-2,\bar{\Omega}^m_{iT}} \le const.\lambda^{1-2\alpha}\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}$$
$$+\lambda^{1-\alpha}\left\langle\frac{\partial^2\hat{w}_i^m}{\partial z_1\partial z_2}|_{z=Z_m^{-1}(x)}\right\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}^m_{iT}}. \tag{4.57}$$

To evaluate the last term in the right hand-side of (4.57), we apply the next interpolate inequality from [23]:

$$\sup_{\bar{Q}}|D_x^2\Phi(x)| \le (\|\Phi\|_{C^{2+\alpha}(\bar{Q})})^{\epsilon^*}(\sup_{\bar{Q}}|\Phi(x)|)^{1-\epsilon^*}, \tag{4.58}$$

where $\epsilon^* \in (0,1)$ and $\partial Q \in C^2$.

Putting $\Phi(x) := \left[\frac{\partial^2 \hat{w}_i^m(z,t_1)}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial^2 \hat{w}_i^m(z,t_2)}{\partial z_1 \partial z_2}\right]_{z=Z_m^{-1}(x)}$ and $\epsilon^* = \frac{2}{2+\alpha}$, we get

$$\left\langle \frac{\partial^2 \hat{w}_i^m}{\partial z_1 \partial z_2}|_{z=Z_m^{-1}(x)} \right\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{iT}^m} \leq const.(\|\bar{w}_i^m\|_{C^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{iT}^m)})^{\frac{2}{2+\alpha}} (\langle \bar{w}_i^m \rangle^{(\alpha)}_{t,s,\bar{\Omega}_{iT}^m})^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},$$

or due to results of Theorem 3.2

$$\left\langle \frac{\partial^2 \hat{w}_i^m}{\partial z_1 \partial z_2}|_{z=Z_m^{-1}(x)} \right\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{iT}^m} \leq const.T^{\frac{2(\alpha^*-\alpha)}{2+\alpha}} \lambda^{-2\alpha} \|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}. \tag{4.59}$$

Then we return to inequality (4.57) and get with (4.59) and (4.52) that

$$\left[\left(\frac{\partial^2 \hat{w}_i^m}{\partial z_1 \partial z_2} \Psi^m_{z_1}(z_1)\right)_{z=Z_m^{-1}(x)} \eta^m\right]^{(\alpha,\alpha)}_{s-2,\bar{\Omega}_{iT}^m} \leq const.[\lambda^{1-2\alpha} + \nu^{\frac{2}{2+\alpha}} \lambda^{2+\frac{2}{2+\alpha}}]$$

$$\times \|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)} \tag{4.60}$$

Thus, (4.45), (4.51), (4.53)-(4.56), (4.60) prove inequality (4.43) for $\|g_{0i}\|_{E^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s-2}(\bar{\Omega}_{iT})}$, $i = 1,2$.

After that, we return to the right hand side of (4.37), and as a consequence of (4.42) and (4.43) we have

$$\left\| k_1 a(x)[\tfrac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial n} - \frac{\partial v^1_{\bar{f}_1}}{\partial n}] + k_1 A_1(x)[\tfrac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial v^1_{\bar{f}_1}}{\partial \omega}] - k_1 A_1(x)[\tfrac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \omega} - \frac{\partial v^2_{\bar{f}_1}}{\partial \omega}] \right\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_{iT})}$$

$$\leq const.C(\lambda,T)\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)}. \tag{4.61}$$

The same arguments together with inequalities from Theorems 3.1 and 3.3 allow to obtain the estimates like (4.61) for the terms $k_1 \sum\limits_{m\in N} \bar{w}_1^m \frac{\partial \eta^m}{\partial n}$ and $k_1 A_1(x) \sum\limits_{m\in N} [\bar{w}_1^m - \bar{w}_2^m]\frac{\partial \eta^m}{\partial \omega}$ in (4.37).

At last, properties (4.8)-(4.10) of the functions $a(x)$ and $A_1(x)$ give

$$\|a(x) - a^m\|_{C^{1+\alpha}(\bar{\Gamma}^m)} + \|A_1(x) - A_1^m\|_{C^{1+\alpha}(\bar{\Gamma}^m)} \leq const.\lambda. \tag{4.62}$$

After that, to evaluate the rest of the terms in (4.37), we use the same reasonings above and inequalities (4.23), (4.62). Hence, we conclude

$$\|\mathcal{L}\mathcal{R}\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)} \leq \|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)} + C(\lambda,T)\|\bar{f}_1\|_{E^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s-1}(\bar{\Gamma}_T)} \tag{4.63}$$

with $0 < C(\lambda,T) << 1$. That completes the proof of Lemma 4.1. ■

The results of Lemma 4.1 mean that there exists an element σ which satisfies to (4.22) and $r^{1+\gamma}\sigma \in E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$, $\sigma_t \in E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$. Then the existence of the functions $\bar{\theta}_i(x,t)$, $i=1,2$, from (4.16)-(4.21) in the corresponding weighted classes follows from [8] in the case of the transmission problem

$$\frac{\partial^2\bar{\theta}_i}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar{\theta}_i}{\partial x_2^2}=0 \quad in\ \Omega_{iT},$$

$$\bar{\theta}_1(x,t)-\bar{\theta}_2(x,t)=A(x)\sigma \quad on\ \Gamma_T,$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial n}-k\frac{\partial\bar{\theta}_2}{\partial n}+A_2(x)\left(\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial\omega}-\frac{\partial\bar{\theta}_2}{\partial\omega}\right)=0 \quad on\ \Gamma_T,$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}_i}{\partial x_1}|_{x_1=0}=0,\ \bar{\theta}_i(x,t)=0 \quad on \quad \Gamma_{iT}, \quad \bar{\theta}_i(x,0)=0. \tag{4.64}$$

We have

$$\|\bar{\theta}_i\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{iT})} \le const.\|r^{1+\gamma}\sigma\|_{E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)},\ i=1,2. \tag{4.65}$$

Thus, Lemma 4.1 together with (4.65) lead to the following results.

Lemma 4.2 *Let conditions of Lemma 4.1 hold, then there is a solution* $(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\sigma)$ *to problem* (4.16)-(4.21) *and* $\bar{\theta}_i \in E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Omega}_{iT})$, $r^{1+\gamma}\sigma \in E_s^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$, $\sigma_t \in E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)$.

Now we need the coercive estimates for solution $(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\sigma)$ which gives the uniqueness of the obtained solution in Lemma 4.2.

Lemma 4.3 *Let the conditions of Lemma 4.1 hold, then for every* $t\in[0,T]$

$$\|(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\sigma)\|_{H_D} \le const.\|\bar{f}_1\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}\bar{\Gamma}_T} \tag{4.66}$$

with the constant is independent of $\bar{f}_1$.

Proof. The standard Schauder technique together with results of Section 3 on the properties of model problems lead to the a priori estimate

$$\|(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\sigma)\|_{H_D} \le const.\left[\|\bar{f}_1\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)}+\langle\bar{\theta}_1\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{1T}}+\langle\bar{\theta}_2\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{2T}}\right]. \tag{4.67}$$

As for the estimates of $\langle\bar{\theta}_i\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{iT}}$, $i=1,2$, we apply inequality (4.24) from Lemma 4.1 in [12] which gives

$$\langle\bar{\theta}_1\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{1T}}+\langle\bar{\theta}_2\rangle^{(\alpha)}_{t,s-2,\bar{\Omega}_{2T}} \le const.\|\bar{f}_1\|_{E_{s-1}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\bar{\Gamma}_T)}$$

$$+const.(\varepsilon+C_\varepsilon T^\alpha)\|(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2,\sigma)\|_{H_D}. \tag{4.68}$$

Choosing ε and T enough small, we deduce from (4.67) and (4.68) inequality (4.66) for $t\in[0,T]$, where T does not depend on the right hand side of linear problem (4.16)-(4.21). ■

Now the proof of Theorem 4.1 can be deduced from the results of Lemmas 4.1-4.3.

5 The Nonlinear problem: The Proof of Theorem 2.1

The proof of Theorem 2.1 is based on Theorem 4.1 and the representation (2.39) of the nonlinear problem. We can rewrite problem (2.39) as

$$\Im \mathbf{z} = \mathsf{F}(\mathbf{z}) \equiv f(x,t) + \mathsf{F}_1(\mathbf{z}), \tag{5.1}$$

where $\mathbf{z} = (\theta_1, \theta_2, \sigma)$ and $\Im$ is the linear operator which is given by the left hand side of (2.39), $\Im : \ H_D \to H_R$; the vector $f(x,t)$ is constructed with initial data; $\mathsf{F}_1(\mathbf{z})$ contains the elements described in Remark 2.4.

As the operator $\Im$ satisfies the conditions of Theorem 4.1, nonlinear problem (5.1) can be represented as

$$\mathbf{z} = \Im^{-1} f + \Im^{-1}\mathsf{F}_1(\mathbf{z}) \equiv P(\mathbf{z}).$$

Lemma 5.1 *Let B_d, $B_d \subset H_D$, be a ball with the center located in the origin and the radius of d. For $\mathbf{z} \in B_d$ the following estimates hold*

$$\|F_1(0)\|_{H_R} \leq const. T^{\alpha^* - \alpha}, \tag{5.2}$$

$$\|F_1(\mathbf{z}_1) - F_1(\mathbf{z}_2)\|_{H_R} \leq const. (d + T^{\alpha^*-\alpha}) \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{H_D}, \tag{5.3}$$

where $0 < \alpha < \alpha^* < 1$.

The proof of Lemma 5.1 repeats the all arguments from Section 5 [29] and is based on the results of Theorems 3.1 and 4.1.

Note that inequalities (5.2) and (5.3) mean that for sufficiently small T and d the nonlinear operator $P(\mathbf{z})$ satisfies the conditions of the fixed point theorem for a contraction operator. Hence, the fixed point of the operator is the solution of problem (2.39), and Theorem 2.1 has been proved.

6 Appendix: The proof of Lemma 3.1

To prove the first statement in the lemma, note that the inverse Laplace transformation of the function $\frac{1}{\nu + A}$, where $Re A > 0$, is the function e^{-At} (see, for example, (5.2.(1)) in [2]). Thus,

$$K(x_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x_1} e^{-(A_1|\lambda| + iA_2\lambda)t} d\lambda = \frac{2A_1 t}{(A_1 t)^2 + (x_1 - A_2 t)^2},$$

and (3.28) follows immediately from this representation of $K(x_1, t)$.

Moreover, using this representation for $K(x_1, t)$, it is easy to get

$$\frac{\partial^l K(x_1, t)}{\partial x_1^l} \to 0 \ as \ |x_1| \to \infty, \ t \in [0, T], \ and \ l \geq 0. \tag{6.1}$$

That proves (3.29) in the case of $l > 0$. To calculate integrals (3.29) in the case of $l = 0$, we change the variable $\frac{y-A_2\tau}{A_1\tau} = z$ in the inner integral and obtain

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(y,\tau)dy = 4\int_0^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi t.$$

It is easy to find $\frac{\partial K(x_1,t)}{\partial x_1}$ from the representation of $K(x_1,t)$

$$\frac{\partial K(x_1,t)}{\partial x_1} = -2K^2(x_1,t)\left(\frac{x_1 - A_2 t}{A_1 t}\right). \tag{6.2}$$

Thus, to estimate I_1 in (3.30), we use (6.2) and change of the variable $\frac{y-A_2\tau}{A_1\tau} = z$ in the inner integral. Then

$$I_1 = const. \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z + \frac{A_2}{A_1}|^\alpha}{(1+z^2)^2} \leq const. t^\alpha,$$

that proves (3.30).

As for inequality (3.31), we use again representation (6.2) and the change of the variable $y - A_2\tau = z$ in the integral with respect to y

$$|I_2| \leq const. \left| \int_0^t d\tau \int_0^{2|\Delta x|} \frac{|z + A_2\tau|^\alpha z A_1\tau}{(z^2 + A_1^2\tau^2)^2} dz \right|$$

$$\leq const. \left(\int_0^t d\tau \int_0^{2|\Delta x|} \frac{z^{1+\alpha} A_1\tau}{(z^2+A_1^2\tau^2)^2} dz + \int_0^t d\tau \int_0^{2|\Delta x|} \frac{|A_2|^\alpha \tau^{1+\alpha} z A_1}{(z^2+A_1^2\tau^2)^2} dz \right)$$

$$\equiv const.(i_1 + i_2). \tag{6.3}$$

First we evaluate i_1 and do the change of the variable $z^2 + A_1^2\tau^2 = u$ in the integral with respect to τ. Thus, one has

$$i_1 \leq const. \int_0^{2|\Delta x|} z^{1+\alpha} dz \int_{z^2}^{z^2+(A_1 t)^2} \frac{du}{u^2} \leq const. \int_0^{2|\Delta x|} z^{\alpha-1} dz = const|\Delta x|^\alpha. \tag{6.4}$$

As for the term i_2, after the change of variables $z = A_1\tau u$ in the integral with respect to z and then $2|\Delta x|(A_1\tau)^{-1} = v$ in the integral with respect to τ, one gets

$$i_2 \leq const. \int_0^t d\tau \tau^{\alpha-1} \int_0^{2\frac{|\Delta x|}{A_1\tau}} \frac{udu}{(u^2+1)^2} = const. \int_0^t \tau^{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{1+4|\Delta x|^2(A_1\tau)^{-2}}\right] d\tau$$

$$\leq const.|\Delta x|^{\alpha} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{v^{1-\alpha} d\alpha}{1+v^2} \leq const.|\Delta x|^{\alpha}. \tag{6.5}$$

Hence, inequalities (6.3)-(6.5) lead to estimate (3.31).

At last, to prove (3.32), we calculate the second derivative of the function $K(x_1, t)$ with respect to x_1

$$\frac{\partial^2 K(x_1,t)}{\partial x_1^2} = -K^3(x_1,t)\left[1 - 3\left(\frac{x_1 - A_2 t}{A_1 t}\right)^2\right],$$

and do change of variables $y = z + A_2\tau$ in the integral with respect to y and then $\tau = \frac{z}{A_1 v}$ in the integral with respect to τ. Thus,

$$\frac{I_3}{|\Delta x|} \leq const. \int\limits_{2|\Delta x|}^{+\infty} dz \int\limits_{0}^{t} \frac{[z + A_2\tau + \Delta x]^{\alpha}}{(A_1\tau)^3(1 + z^2(A_1\tau)^{-2})}|1 - 3z^2(A_1\tau)^{-2}|d\tau$$

$$= const. \int\limits_{|\Delta x|}^{+\infty} \frac{dz}{z^{2-\alpha}} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^2} \leq const.|\Delta x|^{\alpha-1}.$$

These inequalities lead to estimate (3.32), that completes the proof of Lemma 3.1.

References

[1] *D. Ambrose,* Well-posedness of two-phase Hele-Shaw flow without surface tension. –*European J. Appl. Math.* **15** (2004), 597–607.

[2] *H. Bateman, A. Erdélyi,* Tables of integral transforms. Vol.1. Book Company, INC, New York, Toronto, London, 1954.

[3] *B.V. Bazaliy,* Stefan problem for the Laplace equation with regard for the curvature of the free boundary. – *Ukr. Math. J.* **40** (1997), 1465–1484.

[4] *B.V. Bazaliy,* Classical solvability of the free boundary Hele-Shaw problem. – *Ukrainian Math. J.* **50** (1998), 1452–1462.

[5] *B.V. Bazaliy and A. Friedman,* The Hele-Shaw problem with surface tension in a half-plane. – *J. Diff. Eqs.* **216** (2005), 439–469.

[6] *E. Di Benedetto and A. Friedman,* The ill-posed Hele-Shaw and Stefan problems for supercoold water. – *Trans. Amer. Math. Soc.* **282** (1984), 183–203.

[7] *B.V. Bazaliy and N. Vasylyeva,* The Muskat problem with surface tension and a nonregular initial interface. – *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 6074–6096.

[8] *B.V. Bazaliy and N. Vasylyeva,* The transmission problem in domains with a corner point for the Laplace operator in weighted Hölder spaces. – *J. Diff. Eqs.* **249** (2010), 2476–2499.

[9] *B.V. Bazaliy and N. Vasylyeva,* On the solvability of a transmission problem for the Laplace operator with a dynamic boundary condition on a nonregular interface. – *J. Math. Anal. Appl.* **393** (2012), 651–670.

[10] *J.A. Cima, A.L. Matheson, and W.T. Ross,* The Cauchy transform. Mathematical Surveys and Monographs 125, AMS, 2006.

[11] *I.I. Daniliuk,* Nonregular boundary problems on a plane. Nauka, Moscow, 1975. (in Russian)

[12] *S.P. Degtyarev,* The existence of a smooth interface in the nonstationary elliptic Muskat-Verigin problem with a nonlinear source. – *Ukr. Math. Bull.* **7** (2010), 301–330.

[13] C. Elliott and J.R. Ockendon, Weak and variational methods for moving boundary problem. Pitman, London, 1982.

[14] *J. Esher and B.V. Matioc,* On the parabolicity of the Muskat problem: well-posedness, fingering and stability results. – *Z. Anal. Anwend.* **30** (2011), No.2, 193–218.

[15] *J. Esher and G. Simonett,* Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models. –*SIAM J. Math. Anal.* **28** (1997), 1028–1047.

[16] *E.I. Hanzawa,* Classical solution of the Stefan problem. – *Tohoku Math. J.* **33** (1981), 297–335.

[17] *Y.E. Hohlov, and S. Howison,* The classification of solutions in the free boundary Hele-Shaw problem. – *Dokl. Acad. Nauk USSR* **325** (1992), 1161–1166.

[18] *S. Howison,* A note on the two-phase Hele-Shaw problem. – *J. Fluid Mech.* **409** (2000), 243–249.

[19] *L. Jiang and Y. Chen,* Weak formulation of a multidimensional Muskat problem. Free boundary problems:theory and applications, Vol.II (Irsee, 1987), 509–513. Pitman Research Notes in Mathematics Seris, 186. Longman, Harlow, 1990.

[20] *J.R. King, A.A. Lacey, A.A., and J.L. Vazquez,* Persestence of corners in free boundaries in Hele-Shaw flow.– *European J. Appl. Math.* **6** (1995), 455–490.

[21] *M.V. Krasnoschok,* On an initial-boundary value problem for a stationary system of the theory of elasticity with additional dynamic condition on a boundary of a domain. – *Transactions of IAMM* **21** (2010), 137–150.

[22] *O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, V.A., and N.N. Ural'tseva,* Linear and quasilinear parabolic equations. Transl. Math. Monogr. 23 AMS, Providence, RI, 1968.

[23] *A. Lundardi,* Analytic semigroups nad optimal regularity in parabolic problems. Progress in NoDEA. 16 Birkhaüser, Verlag, Basel, 1995.

[24] *P.B. Mucha,* On the Stefan problem with surface tension in the L_p framework. – *Advances in Differential Equations* **10** (2005), No. 8:861–900.

[25] *M. Muskat,* Two fluid systems in porous media. The encroachment of water into an oil sand. – *Physics* **5** (1934), 250–264.

[26] *F. Otto,* Viscous fingering: an optimal bound on the growth rate of the mixing zone. – *SIAM J. Appl. Math.* **57** (1997), No. 4: 982–990.

[27] *Ja.A. Roitberg and Z.G. Sheftel',* General boundary value problems for elliptic equations with discontinuous coefficients. – *Soviet. Math. Dokl.* **4** (1963), 231–234. (Russian)

[28] *M. Siegel, R. Caflisch, and S. Howison,* Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem. – *Comm. Pure and Appl. Math.* **57** (2004), 1374–1411.

[29] *N. Vasylyeva,* On the solvability of the Hele-Shaw problem in the case of nonsmooth initial data in weighted Hölder classes. – *Ukr. Math. Bull.* **2** (2005), No. 3, 323–349.

[30] *F. Yi,* Local classical solution of Muskat free boundary problem. – *J. Partial Diff. Eqs.* **9** (1996), 84–96.

[31] *F. Yi,* Global classical solution of Muskat free boundary problem. – *J. Math. Anal. Appl.* **288** (2003), 442–461.